Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Antonio Lanteri, Marino Palleschi

## Sulle rigate ellittiche

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 87–94.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_87_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

**Geometria algebrica.** — *Sulle rigate ellittiche* (*). Nota (**) di
ANTONIO LANTERI e MARINO PALLESCHI (***), presentata dal Corrisp. E. MARCHIONNA.

SUMMARY. — Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a complex smooth algebraic surface, the general hyperplane section of which is an elliptic curve. A classical Theorem due to G. Castelnuovo ([1]) states that if X is not an elliptic scroll then X is a rational surface. Castelnuovo achieves this result by showing that if X is not a scroll, then a suitable linear system of hypersurfaces in $\mathbf{P}^r$ exhibits X as a projective model of a surface of degree $d$ in $\mathbf{P}^d$, which is not a scroll; hence X is rational.

In this paper we supply a new proof of the previous result (Teorema 3.1) (over an algebraically closed field). This proof allows us to describe, in the class of the (smooth) linearly normal surfaces, the elliptic scrolls as the surfaces of degree $d$ in $\mathbf{P}^{d-1}$ with elliptic general hyperplane section. Our argument is supported by the following fact (Proposizione 3.1): let $\rho : S \dashrightarrow Y \subset \mathbf{P}^{r-1}$ be the projection of a smooth surface $S \subset \mathbf{P}^r$ from a point $p \in S$; if Y is a (smooth) scroll then either S is a rational surface or S itself is a scroll. In the latter case $\rho$ is an elementary transformation with center $p$; hence the elementary transformations, introduced by Nagata in [5], can be seen as projections.

Finally we give an explicit description of projective models of the elliptic scrolls. This construction generalizes the one given in [3] for the elliptic scroll in $\mathbf{P}^4$ and shows the links between the degree, the invariant and the hyperplane class of such surfaces.

1. – Un classico teorema di Castelnuovo ([1]) afferma che una superficie algebrica complessa $X \subset \mathbf{P}^r$ la cui generica sezione iperpiana sia una curva ellittica, è razionale, oppure è una superficie proiettivamente rigata (cioè a fibre rettilinee) ellittica. In [1] il risultato è provato mostrando che se X non è proiettivamente rigata, esiste un opportuno sistema lineare di ipersuperfici di $\mathbf{P}^r$ che permette di rappresentarla come una superficie di grado $d$ in $\mathbf{P}^d$; di qui la sua razionalità.

In questa Nota si fornisce una dimostrazione autonoma del teorema di Castelnuovo (Teorema 3.1). Tale dimostrazione consente anche di descrivere, tra le superfici lisce linearmente normali, quelle proiettivamente rigate ellittiche come tutte e sole le superfici di grado $d$ in $\mathbf{P}^{d-1}$ con sezione iperpiana ellittica. L'ambito considerato è quello delle superfici definite su di un campo algebricamente chiuso e la dimostrazione del teorema è ricondotta, sostanzialmente, ad una interpretazione geometrica delle trasformazioni elementari, introdotte da Nagata in [5], in termini di proiezioni di una superficie proiettivamente rigata da un proprio punto.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1979.
(***) Istituto matematico «F. Enriques» – Via C. Saldini, 50 – Milano.

La Nota si conclude con un paragrafo dedicato ad una costruzione esplicita, puramente proiettiva, dei modelli delle superfici proiettivamente rigate ellittiche. Da tale costruzione, che generalizza quella esposta in [3] a proposito della rigata geometrica ellittica di $\mathbf{P}^4$, risultano pure evidenti i legami che per siffatte superfici sussistono tra il grado, l'invariante e la classe iperpiana.

2. – Col termine superficie si intenderà sempre una superficie algebrica proiettiva, irriducibile, definita su un campo $k$ algebricamente chiuso.

Siano: X una superficie non singolare; $\mathcal{O}_X$ il suo fascio strutturale; Div (X) il gruppo dei divisori su X. Per ogni $D \in \mathrm{Div}(X)$, si denoterà con $\mathcal{O}_X(D)$ il fascio invertibile associato a D e si porrà

$$h^q(D) = h^q(\mathcal{O}_X(D)) = \dim_k H^q(X, \mathcal{O}_X(D)) \qquad (q = 0, 1, 2).$$

Col simbolo $(D \cdot D')$ si denoterà l'indice di intersezione di due divisori $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$. Se $C \subset X$ è una curva irriducibile, è noto che per ogni $D \in \mathrm{Div}(X)$ esiste un divisore $D' \equiv D$ ($\equiv$ denotando l'equivalenza lineare), non contenente C, le cui componenti intersecano C trasversalmente. Con $D \cdot C$ si indicherà il divisore su C (definito a meno di equivalenza lineare) segato da D'.

Siano B una curva algebrica liscia, irriducibile, definita su $k$ e $\mathbf{P}^r = \mathbf{P}^r(k)$ lo spazio proiettivo $r$–dimensionale. Si dice che una superficie liscia X è una *rigata* se è birazionale a $B \times \mathbf{P}^1$; si dice che è una *rigata geometrica* (su B) se esiste un morfismo suriettivo $\pi : X \to B$ tale che sia $F_b = \pi^{-1}(b) \simeq \mathbf{P}^1$, per ogni $b \in B$. È noto (cfr. ad esempio [2], pp. 372–373) che ad ogni rigata geometrica sono associati un *invariante* numerico $e$ (intero relativo) ed una sezione di $\pi$, la cui immagine $C_0$, detta *sezione fondamentale*, ha indice di autointersezione $(C_0^2) = -e$. Per evidenziare che X ha invariante $e$ si suole porre $X = X_e$.

Si denoti con $q = q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ l'irregolarità di una superficie non singolare X. Poiché $X_e$ è birazionale a $B \times \mathbf{P}^1$ (cfr. ad esempio [7], p. 86), dalla invarianza birazionale di $q$, segue

$$q(X_e) = q(B \times \mathbf{P}^1) = g(B),$$

$g(B)$ essendo il genere di B. Se è $g(B) = 1$ si dirà che $X_e$ è una rigata geometrica ellittica.

Si consideri ora un punto $p \in X_e$ e sia $\sigma : \tilde{X} \to X_e$ lo scoppiamento di centro $p$; siano $F = F_{\pi(p)}$ la fibra per $p$ ed $\hat{F} \subset \tilde{X}$ la sua trasformata propria. È immediato osservare che $\hat{F}$ è una curva eccezionale (1); sia allora $\tau : \tilde{X} \to X'$ la sua contrazione. L'applicazione birazionale $\tau \circ \sigma^{-1} : X_e \dashrightarrow X'$ si suole chiamare *trasformazione elementare di centro p*. Com'è noto, X' è ancora una rigata geometrica (su B) (per ulteriori dettagli cfr. [5] oppure [7], pp. 85 e sgg.).

(1) Si intende curva eccezionale di prima specie (cfr. ad esempio [7], p. 31).

Sia F una fibra di $X_e$; il gruppo delle classi di equivalenza numerica su $X_e$ è (cfr. [2], p. 370) $\mathrm{Num}(X_e) \simeq \mathbf{Z}[C_0] \oplus \mathbf{Z}[F]$. Pertanto, denotata con $\equiv$ l'equivalenza numerica, per ogni $D \in \mathrm{Div}(X_e)$ risulta

$$D \equiv aC_0 + bF \qquad (a\,,\, b \quad \text{interi relativi})\,.$$

Sia $X \subset \mathbf{P}^r$ una rigata geometrica (su B). Si dice che X è *proiettivamente rigata*, o che è una *rigata proiettiva* (*scroll*) se ogni fibra di X è una retta. Com'è noto (cfr. ad esempio [4], Osservazione 3.1), $X = X_e$ è proiettivamente rigata se e solo se ha come divisore iperpiano un divisore molto ampio (2) H della forma $H \equiv C_0 + nF$. Si ha pure che $X = X_e$ è proiettivamente rigata se e solo se la sua generica sezione iperpiana H ha genere $g(H) = g(B)$ (3) (cfr. ad esempio [4], Osservazione 3.2).

3. – In questo n. si dimostra, per via autonoma, il teorema dovuto a Castelnuovo (cfr. [1]) concernente le superfici con sezione iperpiana ellittica. Il risultato consegue da una semplice analisi delle superfici non singolari di grado $d$ in $\mathbf{P}^{d-1}$ basata sulla interpretazione geometrica delle trasformazioni elementari in termini di proiezioni.

PROPOSIZIONE 3.1. – *Siano*: $X \subset \mathbf{P}^r$ *una superficie liscia*; $\rho_A : X \dashrightarrow \mathbf{P}^{r-1}$ *la proiezione di* X *da un suo punto* A *in* $\mathbf{P}^{r-1}$; $Y_A = \rho_A(X)$. *Se* $Y_A$ *è una rigata proiettiva, allora, o anche* X *è una rigata proiettiva e* $\rho_A$ *è la trasformazione elementare di centro* A, *oppure* X *è una superficie razionale.*

*Dimostrazione*. – Sia $\pi : Y_A \to B$ (B curva liscia di genere $g(B)$) il morfismo che esibisce $Y_A$ come rigata geometrica. Essendo $Y_A$ una rigata proiettiva, ogni fibra F di $\pi$ è una retta; pertanto l'immagine inversa $F' = \rho_A^*(F) \in \mathrm{Div}(X)$ è una retta oppure una curva di grado $n$ avente A come punto di molteplicità $n - 1$. Si inizi col supporre che $F'$ sia una retta. L'applicazione razionale $\tau \overset{!}{=} \pi \circ \rho_A : X \dashrightarrow B$ è definita, a priori, soltanto fuori del punto A, ma, in effetti, $\tau$ è un morfismo. Infatti, si consideri lo scoppiamento di X di centro A, $\sigma : \tilde{X} \to X$, e sia $\eta = \pi \circ \rho_A \circ \sigma$ il morfismo che risolve l'indeterminazione di $\tau$ (a priori esistente in A). Ogni fibra di $\eta$ è connessa, essendolo la generica $\hat{F}' = \sigma^*(F')$. La curva eccezionale E, introdotta con lo scoppiamento $\sigma$, non può intersecare le fibre di $\eta$, altrimenti tutte le rette $F'$ passerebbero per A e, pertanto, X sarebbe un cono. Dunque E è contenuta in una fibra del morfismo $\eta$, $G = E + \hat{F}'_0$, ove $\hat{F}'_0$ è la trasformata propria di una retta $F'_0$ passante per A. Da tutto ciò segue che $\tau : X \to B$ è un morfismo ed X è una

(2) Un divisore H, o il fascio invertibile associato $\mathcal{O}_X(H)$, è molto ampio (cfr. [2], p. 120) se il sistema lineare completo $|H|$ è ampio nel senso considerato da KODAIRA in *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, «Ann. Math.», 59 (1954), 86–133.

(3) In generale, per una rigata geometrica, in forza del teorema di Riemann–Hurwitz vale la disuguaglianza $g(H) \geq g(B)$.

rigata proiettiva. Inoltre, è immediato che $\hat{F}'_0$ sia una curva eccezionale; pertanto il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\rho_A"'] & & Y_A , \end{tikzcd}$$

ove $\alpha$ è la contrazione di $\hat{F}'_0$, mostra che $\rho_A$ è la trasformazione elementare di centro A. Si supponga ora che $F' = \rho_A^*(F)$ non sia una retta; in tal caso, il punto A appartiene a tutte le curve $F'$. Si consideri ancora lo scoppiamento $\sigma : \tilde{X} \to X$ di X in A e la relativa curva eccezionale $E \subset \tilde{X}$. Poiché $\eta = \pi \circ \rho_A \circ \sigma$ è un morfismo di $\tilde{X}$ su B le cui fibre intersecano E, il teorema di Riemann - Hurwitz comporta $g(B) \leq g(E) = 0$, con ciò $\tilde{X}$ è razionale, e quindi lo è pure X [(4)].

OSSERVAZIONE 3.1. - *Sia* $X \subset \mathbf{P}^4$ *una superficie liscia, rigata, di grado* $d = 5$, *irregolarità* $q = 1$, *e con sezioni iperpiane ellittiche; allora* X *è una rigata proiettiva ellittica* [(5)].

Basta mostrare che X è una rigata geometrica e l'asserto discende dalla caratterizzazione delle superfici proiettivamente rigate richiamata alla fine del n. 2. È noto (cfr. [2], p. 434) che per ogni superficie liscia $X \subset \mathbf{P}^4$ sussiste un legame tra i caratteri numerici. Se X è una rigata, indicati con $d$ il suo grado, con $q$ la sua irregolarità, con K un divisore canonico e con H una sezione iperpiana, tale legame assume la forma

$$d^2 - 10\,d + 12\,(1 - q) = 5\,(H \cdot K) + 2\,(K^2)\,.$$

Nel caso attuale, la formula del genere fornisce $(H \cdot K) = 2g(H) - 2 - (H^2) = -5$; così la formula precedente comporta $(K^2) = 0$. Poichè per una rigata X si ha $(K^2) = 8\,(1 - q) - s$ ove $s$ è il numero degli scoppiamenti necessari per ottenere X da un suo modello minimale geometricamente rigato, ne segue $s = 0$. Dunque X è una rigata geometrica.

È ora possibile provare il teorema di Castelnuovo.

TEOREMA 3.1. - *Siano*: X *una superficie liscia*; $H \in \mathrm{Div}(X)$ *un divisore molto ampio* [(6)] *di genere* $g = g(H) = 1$; $\Phi_H$ *l'immersione chiusa definita dal sistema lineare completo* $|H|$. *Allora* X *è una superficie razionale e* $\Phi_H(X)$

(4) Se ad esempio le curve $\rho_A^*(F)$ sono coniche, non è detto che X non sia proiettivamente rigata; in tal caso, però, si può provare che X è necessariamente la rigata cubica di $\mathbf{P}^4$. Si ha allora anche che $Y_A$ è la quadrica e la proiezione muta il fascio delle coniche per A nel regolo delle sezioni di $Y_A$.

(5) In realtà X è la rigata proiettiva ellittica di invariante $e = -1$ (cfr. [3], Teorema 3.1).

(6) Si supporrà sempre, come è lecito, che H sia una curva irriducibile.

*è una superficie di Del Pezzo, oppure* X *è una rigata geometrica ellittica e* $\Phi_H(X)$ *è una rigata proiettiva ellittica.*

*Dimostrazione.* – Posto $(H^2) = d$ ed osservato che, essendo H molto ampio, risulta $d > 0$, dalla formula del genere segue

$$(H \cdot K) = -d < 0, \tag{3.1}$$

K essendo un divisore canonico. Allora, per ogni intero $n > 0$ si ha $(H \cdot nK) = -nd < 0$; da ciò segue $P_n = h^0(nK) = 0$ e, pertanto, X è rigata; sia $q$ la sua irregolarità. Essendo, in particolare, $p_g = h^0(K) = 0$ ed H effettivo e non banale, risulta $h^0(K - H) = 0$ e, per dualità di Serre, $h^2(H) = 0$. Il Teorema di Riemann–Roch fornisce allora:

$$h^0(H) = 1 - q + d + h^1(H). \tag{3.2}$$

Si consideri ora la successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(H) \to \mathcal{O}_H(H \cdot H) \to 0,$$

e la successione di coomologia da essa indotta:

$$\cdots \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_X(H)) \to H^1(H, \mathcal{O}_H(H \cdot H)) \to \cdots$$

Risulta $\deg H \cdot H = d > 2g(H) - 2 = 0$; dunque si ha $H^1(H, \mathcal{O}_H(H \cdot H)) = 0$, da cui la suriettività di $\alpha$. Ciò comporta

$$h^1(H) \leq h^1(\mathcal{O}_X) = q. \tag{3.3}$$

Ciò posto, si noti che risulta $q \leq 1$. Infatti, essendo X rigata, X è birazionale a $B \times \mathbf{P}^1$ con B curva liscia di genere $g(B) = q$. Se ne deduce l'esistenza di un morfismo $H \to B$ e perciò, per il teorema di Riemann–Hurwitz, $q = g(B) \leq \leq g(H) = 1$.

Si inizi col supporre $q = 0$. In tal caso la (3.3) e la (3.2) comportano $h^0(H) = 1 + d$. Dunque $\Phi_H(X)$ è una superficie liscia di grado $d$ in $\mathbf{P}^d$, non iperpiana e linearmente normale; ossia è una superficie di Del Pezzo (cfr. [5], p. 366). Sia ora $q = 1$. In tal caso X è una rigata ellittica e la (3.3) mostra che si ha $h^1(H) \leq 1$. Non può essere $h^1(H) = 1$, altrimenti, per la (3.2), sarebbe $h^0(H) = 1 + d$ e $\Phi_H(X)$ sarebbe ancora una superficie di Del Pezzo e quindi razionale. Allora si ha $h^1(H) = 0$ e, per la (3.2), $h^0(H) = d$. Pertanto $Y_d = \Phi_H(X)$ è una superficie di grado $d$ in $\mathbf{P}^{d-1}$, non iperpiana. Poiché è $q = 1$, si ha $d \geq 5$ e per $d = 5$ l'Osservazione 3.1 basta per concludere. Se è $d > 5$ si proietti $Y_d$ in $\mathbf{P}^{d-2}$ da un suo punto; si otterrà una superficie $Y_{d-1} \subset \mathbf{P}^{d-2}$ di grado $d - 1$, eventualmente singolare. Si proietti di nuovo $Y_{d-1}$ da un suo punto di massima molteplicità in $\mathbf{P}^{d-3}$, e così si prosegua sino ad ottenere una superficie $Y_{4-\varepsilon}$ di grado $4 - \varepsilon$ contenuta in $\mathbf{P}^3$. L'intero $\varepsilon \geq 0$ è strettamente positivo se e soltanto se almeno una delle precedenti proiezioni è stata effettuata da un punto singolare della superficie da proiettare. In tal caso

$Y_{4-\varepsilon} \subset \mathbf{P}^3$ sarebbe razionale (7), mentre la composizione delle proiezioni suddette mostra che $Y_{4-\varepsilon}$ è birazionale alla rigata irrazionale X. Tale assurdo comporta che in una qualsiasi proiezione intermedia si ottenga una superficie liscia. In particolare, tale risulta la $Y_5 \subset \mathbf{P}^4$. Dalla osservazione 3.1 segue però che $Y_5$ è una rigata proiettiva (ellittica) e, pertanto, per la proposizione 3.1, anche $Y_d = \Phi_H(X)$ è una rigata proiettiva.

Dalla dimostrazione del Teorema 3.1 si deduce pure facilmente il

COROLLARIO 3.1. – *Sia* $X \subset \mathbf{P}^n$ *una superficie liscia, non iperpiana e linearmente normale;* X *è una superficie proiettivamente rigata ellittica se e solo se ha grado* $d = n + 1$ *e come generica sezione iperpiana una curva ellittica.*

4. – In questo n. si costruiscono, per ogni valore dell'invariante $e$, i modelli proiettivamente rigati delle rigate geometriche ellittiche $X_e$. Tali modelli, che sono superfici di grado $d$ in $\mathbf{P}^{d-1}$, sono ottenuti generalizzando il procedimento seguito in [3] per la costruzione esplicita di un modello della rigata geometrica ellittica di $\mathbf{P}^4$.

Siano $L_1$ ed $L_2$ due sottospazi lineari di $\mathbf{P}^r$ $(r \geq 4)$ aventi in comune un solo punto $p_0$ e la cui unione generi $\mathbf{P}^r$; sia $r_i = \dim L_i$ $(i = 1, 2)$ e $r_2 \geq r_1 \geq 2$. Si considerino poi una curva ellittica B e due suoi punti $k_1$ e $k_2$ tali che $k_2 - k_1$ non sia di ordine tre, ossia con $3(k_2 - k_1) \neq 0$.

Sia $\delta_i \in \operatorname{Div}(B)$ $(i = 1, 2)$ un divisore di grado $\deg \delta_i = r_i + 1$; avendosi $\deg \delta_i \geq 3$, $\delta_i$ è molto ampio. Siano $j_i : B \hookrightarrow L_i$ $(i = 1, 2)$ immersioni chiuse definite rispettivamente dalle serie lineari $|\delta_1|$ e $|\delta_2|$, tali che risulti

$$j_1(k_1) = j_2(k_2) = p_0 .$$

Si denoti inoltre con $\Gamma_i$ $(i = 1, 2)$ la curva ellittica $j_i(B)$. Per ogni $b \in B$, con $b \neq k_1$, sia $F_b$ la retta congiungente i punti $j_1(b) \in \Gamma_1$ e $j_2(b + k_2 - k_1) \in \Gamma_2$. Considerata l'applicazione a valori nella grassmanniana delle rette di $\mathbf{P}^r$

$$\psi : B \setminus \{k_1\} \to \operatorname{Grass}(1, r)$$

definita da $\psi(b) = F_b$, sia $\overline{\psi}$ la sua estensione a B (cfr. [2], p. 43). Si porrà

$$F_{k_1} = \overline{\psi}(k_1) .$$

LEMMA 4.1. – *Siano* $b, b' \in B$ *con* $b \neq b'$; *risulta* $F_b \cap F_{b'} = \varnothing$.

*Dimostrazione.* – La dimostrazione è del tutto analoga a quella del lemma 5.1 in [3].

(7) Si noti che, per $\varepsilon = 1$, $Y_3$ non può essere un cono ellittico; se lo fosse, la $Y_n$ di $\mathbf{P}^4$ da cui si ottiene per proiezione ammetterebbe una $n$-secante.

Sia ora S la sottovarietà di $\mathbf{P}^r$ costituita dalle rette $F_b$ ($b \in B$). Sussiste la

PROPOSIZIONE 4.1. – *S è una rigata proiettiva ellittica di grado* $d = r + 1$. *Se* $m$ ($m \geq 3$) *denota il grado di una sua sezione fondamentale* $C_0$, *allora* S *ha invariante*

$$e = d - 2m \tag{4.1}$$

*e divisore iperpiano*

$$H \equiv C_0 + (d - m) F.$$

*Dimostrazione.* – In base al lemma 4.1 è definito il morfismo $\pi : S \to B$ dato da $\pi(p) = b$ se $p \in F_b$. Inoltre ogni punto $p \in S$, appartenendo ad una unica retta $F_b$, possiede un intorno in S isomorfo ad $U \times V$, ove U è un intorno di $p$ in $F_b$ e V un intorno di $b = \pi(p)$ in B. Pertanto S è una superficie liscia, il morfismo $\pi$ la esibisce come una rigata geometrica ellittica $X_e$ e, per costruzione, S è proiettivamente rigata. Sia $\Pi_0$ un iperpiano generico di $\mathbf{P}^r$ contenente il sottospazio $L_1$; $\Pi_0$ contiene la curva $\Gamma_1$ e sega la curva $\Gamma_2$ in $r_2 + 1$ punti, uno dei quali è il punto $p_0 = L_1 \cap L_2$. Siano $p_1, \cdots, p_{r_2}$ i rimanenti e siano $F_1, \cdots, F_{r_2}$ le fibre di S che li contengono. Indicata con $H_0$ la sezione di S con l'iperpiano $\Pi_0$, si ha, evidentemente,

$$H_0 = \Gamma_1 + F_1 + \cdots + F_{r_2}. \tag{4.2}$$

Da ciò segue che S ha grado $d = (H^2) = (H \cdot H_0) = (H \cdot \Gamma_1) + r_2 = r + 1$. Considerato poi che la curva ellittica $\Gamma_i$ è una sezione di $\pi$, si ha

$$\Gamma_i \equiv C_0 + n_i F \qquad (i = 1, 2)$$

ove l'intero $n_i$ è non negativo (cfr. [2], p. 382). Da ciò segue

$$r_i + 1 = \deg \Gamma_i = \deg C_0 + n_i \qquad (i = 1, 2); \tag{4.3}$$

d'altra parte, poiché $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ hanno in comune il solo punto $p_0$, risulta

$$1 = (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2) = -e + n_1 + n_2.$$

Di qui, posto $m = \deg C_0$, e tenuto conto della (4.3), si ha la (4.1). Infine, dalla (4.2) si ha $H \equiv C_0 + (n_1 + r_2) F$, e per la (4.3) è

$$n_1 + r_2 = r_1 + r_2 + 1 - \deg C_0 = d - m.$$

Vale la pena di notare che la (4.1) fornisce una limitazione per $e$. Infatti, poiché la sezione fondamentale $C_0$ di S è una curva ellittica, si ha $m = \deg C_0 \geq 3$ e quindi la (4.1) comporta $e \leq d - 6$.

Sia $r_1 = 2$; in tal caso $\Gamma_1$ è una cubica ellittica e quindi, dalla (4.3), si ha $m = 3$, $n_1 = 0$. Da ciò consegue che $\Gamma_1$ stessa è una sezione fondamentale.

Dalla proposizione 4.1 risulta allora che S è una rigata proiettiva ellittica di grado $d = r_2 + 3$, invariante $e = d - 6$ e divisore iperpiano $H \equiv C_0 + (e + 3) F$.

È immediato perciò il seguente

COROLLARIO 4.1. – *Per ogni valore ammissibile dell'invariante* $e$ [(8)], *esiste una rigata proiettiva ellittica di grado* $d = e + 6$ *in* $\mathbf{P}^{d-1}$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] G. CASTELNUOVO (1894) – *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche.* « Rend. Accad. Naz. Lincei » (5) *3*, 229–232.

[2] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

[3] A. LANTERI e M. PALLESCHI (1978) – *Osservazioni sulla rigata geometrica ellittica di* $\mathbf{P}^4$. « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *A 112*, 223–233.

[4] A. LANTERI e M. PALLESCHI (1979) – *Sulle superfici di grado piccolo in* $\mathbf{P}^4$. « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *A 113* (in corso di stampa).

[5] M. NAGATA (1960) – *On rational surfaces* I. «Mem. Coll. Sci. Kyoto» (A) *32*, 351–370.

[6] M. NAGATA (1970) – *On self-intersection number of a section on a ruled surface.* « Nagoya Math. J. », *37*, 191–196.

[7] I. R. SHAFAREVICH e ALTRI (1965) – *Algebraic Surfaces.* « Proc. Steklov Inst. Math. », *75* (trad. « Amer. Math. Soc. », 1967).


(8) Per un classico risultato di Nagata (cfr. [6]) l'invariante $e$ della rigata geometrica ellittica $X_e$ è soggetto alla limitazione $e \geq -1$.