Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Biliotti, Alessandro Scarselli

Sulle strutture di traslazione dotate di dilatazioni proprie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 75–80.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_75_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Geometria. — *Sulle strutture di traslazione dotate di dilatazioni proprie.* Nota (*) di MAURO BILIOTTI e ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We study a finite translation structure with nontrivial dilatations and give a characterization of its translation group.

Nella presente Nota si considerano strutture di André ([1]) finite con il gruppo T delle traslazioni transitivo sull'insieme dei punti (ora e nel seguito, per la terminologia si veda 1) e si ottiene una caratterizzazione del gruppo T nell'ipotesi che la struttura possegga dilatazioni non identiche con un punto fisso. Si costruiscono in particolare esempi di strutture di André (e fra queste di spazi di Sperner) per le quali il gruppo T non è abeliano. Negli esempi, sinora noti, T risultava, a quanto ci consta, sempre abeliano. Per i noti risultati di Schulz ([6]) resta risolto l'analogo problema per i 2–disegni.

1. – La terna $\Sigma = (\mathscr{P}, \mathscr{R}, \|)$, ove $\mathscr{P}$ è un insieme di elementi detti *punti*, $\mathscr{R}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathscr{P}$ detti *rette* e «$\|$» una relazione di equivalenza su $\mathscr{R}$, si dice una *struttura di André* se soddisfa i seguenti assiomi:

A_1) *Due punti distinti appartengono ad una e una sola retta.*

A_2) *Per ogni punto* p *e ogni retta* R *esiste una e una sola retta* S *tale che* $p \in S$ *e* $S \| R$.

A_3) *In* $\mathscr{P}$ *esistono almeno tre punti non appartenenti ad una stessa retta; ad ogni retta appartengono almeno due punti.*

Due strutture di André $\Sigma = (\mathscr{P}, \mathscr{R}, \|)$, $\Sigma' = (\mathscr{P}', \mathscr{R}', \|')$ si dicono isomorfe se esiste una biiezione α di $\mathscr{P}$ su $\mathscr{P}'$ tale che α e α^{-1} mutano rette in rette e conservano il parallelismo. Se $\Sigma = \Sigma'$, α è detta un *automorfismo*. Una *dilatazione* è un automorfismo tale che $R \| R^{\alpha}$ per ogni $R \in \mathscr{R}$. Una dilatazione non identica fissa al più un punto ([1], p. 97). Una dilatazione non identica con un punto fisso è detta *dilatazione propria*; una dilatazione identica oppure priva di punti fissi è detta *traslazione*.

Una struttura di André si dice *di traslazione* se possiede un gruppo di traslazioni transitivo sull'insieme dei punti.

Vale il noto

TEOREMA (André [2]). – *Sia* $\mathscr{S} = \{T_i \mid i \in I\}$, *una partizione non banale di un gruppo* T. *La terna costituita da:*

(*) Lavoro svolto nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1979.

– *l'insieme degli elementi di* T ;

– *l'insieme* $L(\mathcal{S})$ *dei laterali destri degli elementi di* $\mathcal{S}$;

– *la relazione* «$\|$» *in* $L(\mathcal{S})$ *definita da*

$$T_i a \| T_j b \quad \text{se e solo se} \quad T_i = T_j$$

è una struttura di André, che denotiamo con $[T, \mathcal{S}]$, *dotata di un gruppo di traslazioni* $\overline{T}$, *isomorfo a* T, *costituito dalle applicazioni di* T *in sè del tipo* $\bar{a} : x \mapsto xa \ (a \in T)$, *transitivo sull'insieme dei punti. Viceversa se* $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \|)$ *è una struttura di André, p un suo punto,* T *un gruppo di traslazioni transitivo su* $\mathcal{P}$, *allora* $\mathcal{S} = \{T_R \mid p \in R \in \mathcal{R}\}$ *è una partizione non banale di* T *e risulta* Σ *isomorfa a* $[T, \mathcal{S}]$.

È noto ([1], [2]) che in una struttura di André $[T, \mathcal{S}]$ con un numero finito di punti, le traslazioni costituiscono un gruppo (coincidente con $\overline{T}$); è inoltre noto che, in tal caso, ogni dilatazione di $[T, \mathcal{S}]$, che fissa il punto 1, opera su T come un automorfismo di T che muta in sè ogni componente di $\mathcal{S}$. Viceversa ogni tale automorfismo induce in $[T, \mathcal{S}]$ una dilatazione che fissa il punto 1.

Affrontiamo pertanto lo studio di un gruppo finito, dotato di una partizione non banale e di un automorfismo non banale, necessariamente privo di punti fissi, che muta in sè ogni componente di tale partizione.

2. – Sia T un gruppo di esponente p (p numero primo), $\mathcal{S} = \{T_i \mid i \in I\}$ una partizione di T e σ un automorfismo non banale di T tale che $T_i^\sigma = T_i$ per ogni i.

Se $g \in T$ sia L_g il sottogruppo di T generato dai trasformati di g mediante gli elementi di $\langle\sigma\rangle$.

LEMMA 1. – *Sia* T *abeliano,* $g \in T$ *e* $p_g(x) \in GF(p)[x]$ *il polinomio minimo di* σ *su* L_g ; $p_g(x)$ *non dipende da* g.

Dimostrazione. – Sia $1 \neq g \in T_i$, $h \in T_j$ $(i \neq j)$, $gh \in T_k$ e sia inoltre $p_g(x)$ irriducibile. Si avrà allora $T_k \ni (gh)^{p_g(\sigma)} = h^{p_g(\sigma)} \in T_j$ onde $h^{p_g(\sigma)} = 1$. Ripetendo il ragionamento con h al posto di g e con un elemento generico t di T_i in luogo di h, si ha $t^{p_g(\sigma)} = 1$.

LEMMA 2. – *Sia* L_g *abeliano per ogni* $g \in T$ *e sia* $p_g(x) \in GF(p)[x]$ *il polinomio minimo di* σ *su* L_g ; $p_g(x)$ *non dipende da* g.

Dimostrazione. – Sia T un controesempio di ordine minimo. In base al Lemma 1, T non è abeliano e quindi esiste un sottogruppo Z σ–invariante minimale di T contenuto in $T' \cap Z(T)$. Chiaramente Z è contenuto in una componente T_s della partizione. Non è difficile mostrare per induzione, che ogni componente T_i con $i \neq s$ è σ–invariante minimale. Da ciò segue che l'insieme $\{T_i Z/Z \mid i \in I\}$ è una partizione di T/Z costituita da sottogruppi σ–invarianti. Sia $g \in T$ e siano $\bar{g}$ e $\overline{L_g}$ rispettivamente le immagini di g e L_g nell'omomorfismo naturale di T su T/Z; chiaramente è $L_{\bar{g}} = \overline{L_g}$. Se $p(x)$

è il polinomio minimo di σ su $L_{\bar{g}}$, per induzione, $p(x)$ non dipende da $\bar{g}$. Ne segue $L_t^{p(\sigma)} \subseteq Z$ per ogni $t \in T$ e quindi, se $L_t \cap Z = \langle 1 \rangle$, dalla irriducibilità di $p(x)$ discende $p_t(x) = p(x)$.

Sia $1 \neq g \in T_i \neq T_s \supseteq Z$, $t \in Z$, $gt \in T_k$. Risulta $T_k \ni (gt)^{p(\sigma)} = g^{p(\sigma)} t^{p(\sigma)} = t^{p(\sigma)} \in T_s$ e quindi $t^{p(\sigma)} = 1$. Sia $L_t \neq L_t \cap Z \neq \langle 1 \rangle$. Poiché Z è σ–irriducibile si ha che $L_t \supset Z$, ed essendo L_t abeliano risulta $L_t = Z \times H$ per un opportuno sottogruppo σ–invariante H di L_t. Essendo $H \cap Z = \langle 1 \rangle$, per ogni $h \in H$ è $h^{p(\sigma)} = 1$ e quindi $p_h(x) = p(x)$. Ne segue $t^{p(\sigma)} = 1$ ovvero $p_t(x) = p(x)$. Si ottiene una contraddizione poiché $p(x)$ è irriducibile mentre L_t non è σ–irriducibile.

LEMMA 3. – *Se* $g, h \in T$ *e* $(gh^{-1})^\sigma (gh^{-1}) = (gh^{-1})(gh^{-1})^\sigma$, *allora* $[g, g^\sigma][g^\sigma, h] = [g, h^\sigma][h^\sigma, h]$.

Dimostrazione. – $[g, g^\sigma][g^\sigma, h] = g^{-1} g^{-\sigma} g g^\sigma g^{-\sigma} h^{-1} g^\sigma h = g^{-1} g^{-\sigma} g h^{-1} g^\sigma h = g^{-1} g^{-\sigma} g h^{-1} g^\sigma h (h^{-\sigma} h^\sigma) = g^{-1} g^{-\sigma} (gh^{-1})(g^\sigma h^{-\sigma}) h [h, h^{-\sigma}] h^\sigma = g^{-1} g^{-\sigma} g^\sigma h^{-\sigma} g h^{-1} h [h, h^{-\sigma}] h^\sigma = g^{-1} h^{-\sigma} g h^{-1} h [h, h^{-\sigma}] h^\sigma = g^{-1} h^{-\sigma} g h^{-1} h h^{-1} h^\sigma h h^{-\sigma} h^\sigma = g^{-1} h^{-\sigma} g h^{-1} h^\sigma h = g^{-1} h^{-\sigma} g h^\sigma h^{-1} [h^{-1}, h^\sigma] h = [g, h^\sigma] h^{-1} h h^{-\sigma} h^{-1} h^\sigma h = [g, h^\sigma][h^\sigma, h]$.

LEMMA 4. – *Per ogni* $g \in T$, L_g *risulta abeliano.*

Dimostrazione. – L'asserto è ovvio se T è abeliano. Sia T un controesempio di ordine minimo e sia Z un sottogruppo σ–irriducibile di T contenuto in $T' \cap Z(T)$. Per l'ipotesi di induzione si ha $L_g' \subseteq Z$ per ogni $g \in T$. Sia T_s la componente contenente Z; se $g \notin T_s$ è $L_g' = \langle 1 \rangle$. Sia ora $g \in T_s$ tale che $L_g' \neq \langle 1 \rangle$ e sia $h \notin T_s$. Essendo Z σ–irriducibile, risulta $L_g' = Z$. Per induzione, in base al Lemma 2, il polinomio minimo $p(x)$ di σ su L_h coincide con quello di σ su Z e su L_g/Z. Sia $p(x)$ di grado r; posto per ogni $t \in T$, $t^{\sigma^m} = t_m$, gli elementi $g_0, g_1, \cdots, g_{r-1}$ generano L_g. Si ha inoltre $g_i h_j^{-1} \notin T_s$ per ogni i, j e quindi $(g_i h_j^{-1})^\sigma (g_i h_j^{-1}) = (g_i h_j^{-1})(g_i h_j^{-1})^\sigma$. In base al Lemma 3 si ha allora, per ogni m, $[g_i, g_{i+m}][g_{i+m}, h_j] = [g_i, h_{j+m}]$ essendo $[h_{j+m}, h_j] = 1$ per ogni j. Per $j = i = k$ e $m = n$ si ottiene

$$(1) \qquad [g_k, g_{k+n}][g_{k+n}, h_k] = [g_k, h_{k+n}]$$

per $i = k + n - 1$, $j = k$ e $m = 1$ si ottiene

$$(2) \qquad [g_{k+n-1}, g_{k+n}][g_{k+n}, h_k] = [g_{k+n-1}, h_{k+1}]$$

per $i = k + n - 2$, $j = k + 1$ e $m = 1$, si ottiene

$$(3) \qquad [g_{k+n-2}, g_{k+n-1}][g_{k+n-1}, h_{k+1}] = [g_{k+n-2}, h_{k+2}]$$

$\vdots$

per $i = k + 1$, $j = k + n - 2$ e $m = 1$ si ottiene

$$(n) \qquad [g_{k+1}, g_{k+2}][g_{k+2}, h_{k+n-2}] = [g_{k+1}, h_{k+n-1}]$$

per $i = k, j = k + n - 1$ e $m = 1$ si ottiene

$$[g_k, g_{k+1}][g_{k+1}, h_{k+n-1}] = [g_k, h_{k+n}]. \tag{$n+1$}$$

Da $(n+1)$ si ottiene $[g_{k+1}, h_{k+n-1}] = [g_{k+1}, g_k][g_k, h_{k+n}]$ e sostituendo in (n) si ha

$$[g_{k+1}, g_{k+2}][g_{k+2}, h_{k+n-2}] = [g_{k+1}, g_k][g_k, h_{k+n}]$$

da cui $[g_{k+2}, h_{k+n-2}] = [g_{k+2}, g_{k+1}][g_{k+1}, g_k][g_k, h_{k+n}]$.
Così procedendo si ottiene

$$[g_k, g_{k+n}][g_{k+n}, g_{k+n-1}] \cdots [g_{k+2}, g_{k+1}][g_{k+1}, g_k] = 1.$$

In particolare per $k + n \leq r - 1$, si ottiene

$$[g_k, g_{k+n}] \in \langle [g_0, g_1], \cdots, [g_{r-2}, g_{r-1}] \rangle.$$

Poiché $L'_g = \langle [g_i, g_j] \mid 0 \leq i < j \leq r - 1 \rangle$, esso risulta generato da $r - 1$ elementi, un assurdo.

TEOREMA 1. - T *possiede la partizione costituita dai sottogruppi σ–invarianti minimali.*

Dimostrazione. - Per i Lemmi 4 e 2, il polinomio minimo di σ su L_g non dipende da g e pertanto è irriducibile, cioè L_g è σ–irriducibile.

TEOREMA 2. - *Se* U, V *sono sottogruppi σ–invarianti minimali di* T *tali che* $U \nsubseteq C_T(V)$, *allora* $[U, V] = \langle [u, v] \mid u \in U, v \in V \rangle$ *è un sottogruppo σ–invariante minimale.*

Dimostrazione. - Poniamo $L = \langle U, V \rangle$. Per il Lemma 2 il polinomio minimo di σ su U coincide con quello di σ su V, sia esso $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r$. Allora se $1 \neq u_0 \in U$ e $1 \neq v_0 \in V$, $u_0, u_1 = u_0^{\sigma}, \cdots, u_{r-1} = u_0^{\sigma^{r-1}}$ è una base di U, $v_0, v_1 = v_0^{\sigma}, \cdots, v_{r-1} = v_0^{\sigma^{r-1}}$ è una base di V e $L' = [U, V] = \langle [u_i, v_j] \mid 0 \leq i, j \leq r - 1 \rangle$. Per il Lemma 3, $[g^\sigma, h] = [g, h^\sigma]$ per ogni $g, h \in T$. In particolare

$$\begin{aligned}
&[u_0, v_1] = [u_1, v_0] \\
&[u_0, v_2] = [u_1, v_1] = [u_2, v_0] \\
&\vdots \\
&[u_0, v_{r-1}] = [u_1, v_{r-2}] = \cdots = [u_{r-1}, v_0] \\
&[u_1, v_{r-1}] = [u_2, v_{r-2}] = \cdots = [u_{r-1}, v_1] \\
&[u_2, v_{r-1}] = [u_3, v_{r-2}] = \cdots = [u_{r-1}, v_2] \\
&\vdots \\
&[u_{r-2}, v_{r-1}] = [u_{r-1}, v_{r-2}].
\end{aligned} \tag{*}$$

Ne segue che la cardinalità di una base di L′ è $\leq 2r-1$. Poichè L′ possiede la partizione costituita dai suoi sottogruppi σ–invarianti minimali, si verifica facilmente che tale cardinalità è allora esattamente r. Da ciò segue che L′ è σ–invariante minimale.

Osserviamo che in L′ sussistono, oltre alle (*), anche le relazioni

$$(**) \qquad [u_{i+1}, v_{r-1}] = \left[u_i, \prod_{j=0}^{r-1} v_j^{-a_j}\right] \qquad 0 \leq i \leq r-2$$

le quali, tenuto conto delle (*) e del fatto che L ha classe di nilpotenza 2, si traducono in un sistema nelle indeterminate

$$[u_0, v_0], [u_0, v_1], \cdots, [u_0, v_{r-1}], [u_1, v_{r-1}], [u_2, v_{r-1}], \cdots, [u_{r-1}, v_{r-1}],$$

la cui matrice è

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \cdots\cdots & a_{r-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \cdots\cdots & a_{r-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{r-1} & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE 1. – *La classe di nilpotenza di* T *è* ≤ 2 *per* $p \neq 3$ *e* ≤ 3 *per* $p = 3$.

Dimostrazione. – In base al Teorema 2 $[g, h, h] = 1$ per ogni $g, h \in T$ e quindi la tesi segue da un risultato di F. W. Levi (cfr. [5] p. 288).

3.

TEOREMA 3. – *Sia* T *un gruppo*, $\mathscr{S} = \{T_i \mid i \in I\}$ *una partizione non banale di* T *e* σ *un automorfismo non banale di* T *tale che* $T_i^\sigma = T_i$ *per ogni* $i \in I$, *allora* T *è un p–gruppo di esponente p*.

Dimostrazione. – È noto (cfr. ad esempio [4]) che T è un p–gruppo, di esponente p o tale che gli elementi non aventi periodo p generano un sottogruppo proprio. Sia T un controesempio di ordine minimo; se H è il sottogruppo generato dagli elementi che non hanno periodo p esso è necessariamente contenuto in una componente T_1. Sia $g \in H$ con $g^p \neq 1$ e sia $h \notin T_1$. Per induzione i trasformati di g e h mediante gli elementi di $\langle\sigma\rangle$ generano T. Poiché, come è noto, $Z(T) \subseteq H \subseteq T_1$, ancora per l'ipotesi di induzione, $T/Z(T)$ ha esponente p. In conseguenza del Teorema 2, $T/Z(T)$ ha pertanto classe di nilpotenza uguale a 2 e quindi T ha classe di nilpotenza minore o uguale a 3. Per ([4]) è allora necessariamente $\sigma = 1$, un assurdo.

Il Teorema 2 permette di caratterizzare il caso in cui il gruppo sia generato da due componenti σ–irriducibili. Sia $p(x) \in GF(p)[x]$ un polinomio irriducibile, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r$. Si può allora considerare il gruppo $T = \langle u_0, \cdots, u_{r-1}, v_0, \cdots, v_{r-1} \mid u_i^p = v_i^p = [u_i, u_j] = [v_i, v_j] = 1 \ (0 \leq i, j \leq r-1), (*), (**)\rangle$ e di classe 2. Detto σ l'automorfismo definito da $u_i^\sigma = u_{i+1}$, $v_i^\sigma = v_{i+1}$ $(0 \leq i \leq r-2)$, $u_{r-1}^\sigma = \prod_{i=0}^{r-1} u_i^{-a_i}$, $v_{r-1}^\sigma = \prod_{i=0}^{r-1} v_i^{-a_i}$, T ha la partizione costituita dai suoi sottogruppi σ–invarianti minimali se e solo se i coefficienti di $p(x)$ soddisfano la condizione

$$(***) \qquad \left[\prod_{i=0}^{r-1} u_i^{a_i}, \prod_{i=0}^{r-1} v_i^{a_i}\right] \prod_{i=0}^{r-1} [u_i, v_i]^{a_i} = 1 .$$

Per esempio per tale costruzione si può far uso del polinomio $\dfrac{x^q - 1}{x - 1}$ quanto esso è irriducibile su $GF(p)$, poiché la riga dei coefficienti di $[u_0, v_0], \cdots, [u_0, v_{r-1}], [u_1, v_{r-1}], \cdots, [u_{r-1}, v_{r-1}]$, nella espressione a primo membro della (***) è in tal caso il doppio della somma delle righe di posto dispari della matrice A.

Se $\mathscr{T}$ è la classe dei gruppi sopra definiti, il caso dei gruppi di classe 2 si riduce sostanzialmente alla conoscenza di $\mathscr{T}$.

Dal punto di vista geometrico se T è un gruppo della classe $\mathscr{T}$ e $\mathscr{M}$ la partizione nei sottogruppi σ–invarianti minimali, la struttura di André $[T, \mathscr{M}]$ risulta uno spazio di Sperner (a dimensione regolare [3]) di ordine p^r e dimensione 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* I. *Grundbegriffe*. «Math. Z.», *76*, 85–102.

[2] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* II. *Translationsstrukturen*. «Math. Z.», *76*, 155–163.

[3] A. BARLOTTI (1965) - *Alcuni risultati nello studio degli spazi affini generalizzati di Spener*. «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», *35*, 18–46.

[4] M. BILIOTTI (1979) - *Strutture di André ed S-spazi con traslazioni* (in corso di stampa su «Geometriae Dedicata»).

[5] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen* I - Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[6] R. H. SCHULZ (1967) - *Über Blockpläne mit transitiver Dilatationsgruppe*, «Math. Z.», *98*, 60–82.