Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Negrini

Un Teorema di esistenza per un problema di Darboux negli spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 62–66.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_62_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Un Teorema di esistenza per un problema di Darboux negli spazi di Banach.* Nota [(*)] di PAOLO NEGRINI, presentata dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — A Darboux problem in a reflexive Banach space is considered. The existence of a weak solution is proved under suitable hypoteses making use of the concept of the measure of weak noncompactness.

1. – Assumiamo la seguente definizione di «integrale debole»:

Sia E uno spazio di Banach; $I = [a, b]$ un intervallo di $\mathbf{R}$.

Sia $g : I \to E$ debolmente misurabile su I. Se, per ogni $\varphi \in E^*$ esiste, finito, l'integrale di Lebesgue $\int_a^b \langle g(x) \mid \varphi \rangle \, dx$, e se esiste $y \in E$ tale che $\int_a^b \langle g(x) \mid \varphi \rangle \, dx = \langle y \mid \varphi \rangle \; \forall \varphi \in E^*$, diciamo che g è debolmente sommabile su $[a, b]$, e poniamo $y = \int_a^b g(x) \, dx$.

Notiamo che l'integrale debole, se esiste, è unico $\left(\text{se } y \text{ e } y_1 \text{ fanno la funzione di } \int_a^b g(x)\,dx, \text{ allora } \langle y - y_1 \mid \varphi \rangle = 0 \; \forall \varphi \in E^*; \text{ quindi } y = y_1\right)$. Notiamo inoltre che, per la definizione stessa, se g è debolmente sommabile su $[a, b]$, allora $\int_a^b \langle g(x) \mid \varphi \rangle \, dx = \left\langle \int_a^b g(x) \, dx \mid \varphi \right\rangle \; \forall \varphi \in E^*$.

La definizione ora data si estende in modo ovvio a funzioni di due (o più) variabili, per avere il concetto di «integrali multipli» in questo senso debole.

Ricordiamo la seguente definizione di misura di non compattezza debole [1].

Sia E uno spazio di Banach, $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Sia H un sottoinsieme limitato di E. La misura di non compattezza debole di H è, per definizione, il numero reale ≥ 0

$$\beta[H] \overset{\text{def}}{=} \inf . \{t \geq 0 \colon \text{esiste K debolmente compatto} \subseteq E \text{ tale che } H \subseteq K + tB\}.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1979.

Risulta:

a) $\beta[x] = 0 \Longleftrightarrow \overline{X}^d$ è debolmente compatto [1].

b) $\beta[X+Y] \leq \beta[X] + \beta[Y]$ [1]

c) Sia $P = [a, b] \times [c, d]$ un intervallo compatto di $\mathbf{R}^2$; sia H un sottoinsieme limitato ed equicontinuo di C (P, E). Allora

$$\beta[H] = \sup.\{\beta[H(x, y)] ; (x, y) \in P\} = \beta[H(P)]. \quad [2].$$

2. – Sia E uno spazio di Banach, a, b, ρ numeri reali positivi; sia $Q = [0, a] \times [0, b]$, e sia $S = \{u \in E : \|u\| \leq \rho\}$. Sia data una funzione $f : Q \times S \to E$. Vale il seguente

TEOREMA. – *Se* E *è riflessivo e la funzione* f *è tale che*

I. $(x, y) \mapsto f(x, y, u)$ *è debolmente misurabile su* Q *per ogni fissato* $u \in S$

II. $u \mapsto f(x, y, u)$ *è debolmente continua su* S *per ogni fissato* $(x, y) \in Q$

III. $\|f(x, y, u)\| \leq M \ \forall (x, y) \in Q, \forall u \in S$ (M *costante positiva*)

allora sul rettangolo $P = [0, p] \times [0, q]$ *è definita almeno una funzione continua* $u : P \to E$, *soluzione dell'equazione integrale* (*l'integrale è quello debole definito all'inizio*)

$$(1) \qquad u(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(s, t, u(s, t))\, ds\, dt \qquad \forall (x, y) \in P$$

essendo p, q *numeri reali strettamente positivi tale che*: $p \leq a, q \leq b, p \cdot q \cdot M \leq \rho$.

Dimostrazione. – Data una funzione continua $u : P \to E$ con valori in S esiste certamente l'integrale debole $\int_0^x \int_0^y f(s, t, u(s, t))\, ds\, dt$ per ogni $(x, y) \in P$. Infatti, la funzione $(s, t) \mapsto f(s, t, u(s, t))$ è debolmente misurabile e limitata; presa $\varphi \in E^*$, esisterà l'integrale $\int_0^x \int_0^y \langle f(s, t, u(s, t)) \mid \varphi \rangle\, ds\, dt$, indichiamo con $L(\varphi)$ il suo valore (certamente finito), pensando (x, y) fissato. L'operatore $L : E^* \to \mathbf{R}$ è lineare continuo, dunque, per la riflessività di E, esisterà $\xi \in E$ tale che $L(\varphi) = \langle \xi \mid \varphi \rangle \ \forall \varphi \in E^*$; resta dunque definito $\xi = \int_0^x \int_0^y f(s, t, u(s, t))\, ds\, dt$.

Possiamo allora definire, per ogni numero naturale $n \in \mathbf{N}$, una funzione $u_n : \mathrm{P} \to \mathrm{E}$ nella maniera seguente [3]: dato un punto $(x, y) \in \mathrm{P}$ poniamo

$$u_n(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot f(0, 0, 0) & \text{per } (x, y) \in \left[0, \frac{p}{n}\right] \times \left[0, \frac{q}{n}\right] \\ x \cdot \frac{q}{n} \cdot f(0, 0, 0) & \text{per } (x, y) \in \left]\frac{p}{n}, p\right] \times \left[0, \frac{q}{n}\right] \\ \frac{p}{n} \cdot y \cdot f(0, 0, 0) & \text{per } (x, y) \in \left[0, \frac{p}{n}\right] \times \left]\frac{q}{n}, q\right] \\ \frac{pq}{n^2} f(0, 0, 0) + \int\limits_0^{x-(p/n)} \int\limits_0^{y-(q/n)} f(s, t, u_n(s, t))\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t & \\ & \text{per } (x, y) \in \left]\frac{p}{n} \cdot p\right] \times \left]\frac{q}{n}, q\right] \end{cases}$$

Si dimostra per induzione che questa formula definisce effettivamente la funzione $u_n(x, y)$ in tutti i punti $(x, y) \in \mathrm{P}$. La ipotesi $p \cdot q \cdot \mathrm{M} \leq \rho$ assicura che è sempre $\| u_n(x, y) \| \leq \rho$, quindi, una volta definita $u_n(x, y)$, si può sempre fare $f(x, y, u_n(x, y))$. Si dimostra, considerando caso per caso la posizione che i punti (x, y) e (x', y') possono assumere in P, che le funzioni u_n sono tutte lipschitziane, con modulo di lipschitzianità limitato al variare di n, cioè esiste $\mathrm{C} > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathrm{P}$, si ha $\| u_n(x, y) - u_n(x', y') \| \leq \mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|)$. Le funzioni u_n sono quindi, in particolare, continue, e l'insieme $\mathrm{X} = \{u_n ; n \in \mathbf{N}\}$ è equicontinuo, oltre che limitato. Se $(x, y), (x', y') \in \mathrm{P}$ abbiamo per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\|u_n(x, y) - u_n(x', y')\| \leq \mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|)$, quindi $\mathrm{X}(x, y) \subseteq \mathrm{X}(x', y') + \mathrm{S}(0, \mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|)$, avendo indicato con $\mathrm{S}(0, \mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|)$ la sfera chiusa di $\mathbf{E}$ di centro 0 e raggio $\mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|)$. Applicando le proprietà *a*) e *b*) e tenendo presente la riflessività di E, si ha $\beta[\mathrm{X}(x, y)] \leq \beta[\mathrm{X}(x', y')] + \beta[\mathrm{S}(0, \mathrm{C}(|x - x'| + |y - y'|))] = \beta[\mathrm{X}(x', y')]$.

Scambiando i ruoli di (x, y) e (x', y'), risulta $\beta[\mathrm{X}(x', y')] \leq \beta[\mathrm{X}(x, y)]$ e, in definitiva, $\beta[\mathrm{X}(x, y)] = \beta[\mathrm{X}(x', y')]$. La funzione $(x, y) \mapsto \beta[\mathrm{X}(x, y)]$ è quindi costante su P; essendo poi $\beta[\mathrm{X}(0, 0)] = 0$, tale funzione risulta identicamente nulla. Per *c*) sarà dunque $\beta[\mathrm{X}] = 0$, e quindi X è debolmente relativamente compatto in $\mathrm{C}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$. Dalla successione $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si può quindi estrarre una sottosuccessione debolmente convergente a una $u \in \mathrm{C}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$; non è restrittivo supporre che sia $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{d}} u$. Verifichiamo che u è soluzione della equazione integrale (1). Intanto, $u_n(x, 0) = u_n(0, y) = 0$ per ogni x, y, e n; per la debole convergenza di u_n a u avremo allora $u(x, 0) = 0$ $\forall x \in [0, p]$, $u(0, y) = 0$ $\forall y \in [0, q]$. Sia ora $(x, y) \in]0, p] \times]0, q]$. Per ogni n sufficientemente grande sarà $(x, y) \in \left]\frac{p}{n}, p\right] \times \left]\frac{q}{n}, q\right]$; useremo quindi la definizione di $u_n(x, y)$ data in questo caso. Chiamato con D_n l'insieme $([0, x] \times [0, y]) - \left(\left[0, x - \frac{p}{n}\right] \times \left[0, y - \frac{q}{n}\right]\right)$ avremo, fissata a piacere $\varphi \in E^*$, per ogni n abbastanza grande

$$\left|\left\langle u(x, y) - \int_0^x \int_0^y f(s, t, u(s, t))\, ds\, dt \middle| \varphi \right\rangle\right| \leq |\langle u(x, y) - u_n(x, y) | \varphi\rangle| +$$

$$+ \left|\left\langle \int_0^x \int_0^y [f(s, t, u(s, t)) - f(s, t, u_n(s, t))]\, ds\, dt \middle| \varphi \right\rangle\right| +$$

$$+ \left|\left\langle \iint_{D_n} f(s, t, u_n(s, t))\, ds\, dt \middle| \varphi \right\rangle\right| + \frac{pq}{n^2} \left| \langle f(0, 0, 0) | \varphi\rangle \right|.$$

La debole convergenza di u_n a u e la debole continuità di f nel terzo argomento permettono di dimostrare che tutti questi addendi sono convergenti a zero per $n \to \infty$, quindi il primo membro, indipendente da n, sarà uguale a zero. Questo fatto è vero per ogni $(x, y) \in]0, p] \times]0, q]$; si conclude quindi che la funzione u è una soluzione della equazione integrale (1), come volevamo dimostrare.

3. – Assumiamo ora la seguente definizione di «derivata debole»:

Sia $g : [a, b] \to E$ una funzione qualunque. Se per ogni $\varphi \in E^*$ la funzione $x \mapsto \langle g(x) | \varphi\rangle$ è derivabile quasi dappertutto su I $(= [a, b])$ e se esiste una funzione $y : I \to E$ tale che, per ogni $\varphi \in E^*$ si ha $\frac{d}{dx} \langle g(x) | \varphi\rangle = \langle y(x) | \varphi\rangle$ in tutti i punti di I in cui $\langle g(x) | \varphi\rangle$ è derivabile, diciamo che g è debolmente derivabile in I, e poniamo $y = g'$.

Per esempio, data una funzione $\gamma : I \to E$ debolmente sommabile su I e limitata, e posta $g(x) = g_0 + \int_a^x \gamma(t)\, dt$ (tale integrale debole esiste per ogni $x \in I$), la funzione g risulta debolmente derivabile, ed è $g' = \gamma$. Infatti, se $\varphi \in E^*$, la funzione $\langle g(x) | \varphi\rangle = \langle g_0 | \varphi\rangle + \int_a^x \langle \gamma(t) | \varphi\rangle\, dt$ è derivabile quasi dappertutto su I, e quasi dappertutto risulta $\frac{d}{dx} \langle g(x) | \varphi\rangle = \langle \gamma(x) | \varphi\rangle$.

La definizione di derivata debole si estende in modo ovvio a funzioni di due o più variabili, così come l'ultima osservazione.

Dunque, se chiamiamo «soluzione debole» del problema di Darboux

$$
(2) \qquad \begin{cases} u_{xy}(x\,,y) = f(x\,,y\,,u(x\,,y)) & (x\,,y) \in \mathrm{P} \\ u(x\,,0) = 0 & x \in [0\,,p] \\ u(0\,,y) = 0 & y \in [0\,,q] \end{cases}
$$

una funzione $u : \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{E}$ continua, dotata di derivata parziale seconda mista debole soddisfacente alla condizione $u_{xy}(x\,,y) = f(x\,,y\,,u(x\,,y))\ \forall\,(x\,,y) \in \mathrm{P}$ e tale che $u(x\,,0) = 0\ \forall x \in [0\,,p]\,,\ u(0\,,y) = 0\ \forall y \in [0\,,q]$, abbiamo che la funzione u ottenuta nella dimostrazione del teorema del n. 2 è una soluzione debole, nel senso appena dichiarato, del problema di Darboux (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. S. De Blasi (1977) - *On a property of the unit sphere in a Banach space*, «Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. R.», n. Sér., *21* (69), 259–262.

[2] A. R. Mitchell and C. Smith (1978) - *An existence theorem for weak solutions of differential equations in Banach spaces, Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Academic Press, 387–403.

[3] L. Tonelli (1928) - *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, «Bull. of the Calcutta Math. Soc.», *20*, 31–48.