Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Zappa

Osservazioni sui nuclei di Bochner—Martinelli

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 21–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_21_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Funzioni di variabile complessa. — *Osservazioni sui nuclei di Bochner–Martinelli.* Nota [*] di PAOLO ZAPPA [**], presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In this paper some series of Weierstrass' $\wp$ (and its derivatives) type are constructed by means of the Bochner–Martinelli kernels. The Dolbeault cohomology classes of such series generate $H^{0,n-1}(T^n - \{0\})$, where T^n stands for the n-dimensional complex torus.

1. INTRODUZIONE

La funzione $1/z^m$ si può dire generatrice della serie $\sum_{\omega \in \Omega} 1/(z-\omega)^m$ $(m \geqq 3)$, dove Ω è un reticolo di $\mathbf{C}$. In $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$, con le usuali notazioni sui multiindici, la funzione $1/(z-\gamma)^\alpha$, $\gamma \in \mathbf{C}^n$ $\alpha \geqq (1, \cdots, 1)$ definisce un elemento di $H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{\gamma\}, \mathcal{O})$; il suo rappresentante di Dolbeault è una forma di tipo $(0, n-1)$ d''-chiusa in $\mathbf{C}^n - \{\gamma\}$ con singolarità isolata in γ.

In questa Nota si dimostra che se $|\alpha| \geqq n+2$ $(\alpha \geqq (1, \cdots, 1))$ e Γ è un reticolo di rango massimo in $\mathbf{C}^n$ tali forme si possono sommare su $\gamma \in \Gamma$ ottenendosi delle serie convergenti che sono l'analogo delle serie di cui si è detto all'inizio.

Il caso $|\alpha| = n+1$, che per $n = 1$ dà luogo alla $\wp$ di Weierstrass, viene trattato in maniera analoga nel § 5.

2. Sia Γ un reticolo completo in $\mathbf{C}^n$ $(n \geqq 2)$; le forme di tipo $(0, n-1)$ Γ-invarianti e d''-chiuse in $\mathbf{C}^n - \Gamma$ definiscono classi di coomologia in $H^{n-1}(T^n - \{0\}, \mathcal{O})$ ove T^n è il toro complesso $\mathbf{C}^n/\Gamma$ e zero è il punto di T^n che rappresenta Γ. Sia $\pi : \mathbf{C}^n \to T^n$ la proiezione naturale. Sia V un intorno di zero in T^n tale che $\pi^{-1}V$ sia costituito da polidischi U_γ a due a due disgiunti e omeomorfi a V.

Dalla successione di Mayer–Vietoris:

$$0 \to H^{n-1}(T^n, \mathcal{O}) \to H^{n-1}(T^n - \{0\}, \mathcal{O}) \to H^{n-1}(V - \{0\}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^n(T^n, \mathcal{O}) \to 0$$

relativa al ricoprimento $V \cup (T^n - \{0\})$ di T^n si ottiene subito

$$H^{n-1}(T^n - \{0\}, \mathcal{O}) \simeq H^{n-1}(T^n, \mathcal{O}) \oplus \operatorname{Ker} \delta .$$

$H^{n-1}(T^n, \mathcal{O})$ ha dimensione n ed è definito dalle forme a coefficienti costanti di $\mathbf{C}^n$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1979.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

$H^{n-k}(V - \{o\}, \mathcal{O}) \simeq H^{n-1}(U_\gamma - \{\gamma\}, \mathcal{O})$ è uno spazio di Fréchet generato dalle classi di coomologia di Čech rappresentate da $(z-\gamma)^{-\alpha-1} \in \Gamma\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i, \mathcal{O}\right)$ con $\alpha \in N^n$ e $U_i = \{z \in U / z_i - \gamma_i \neq 0\}$ (vedi [1] e [4]).

Andreotti e Norgeut in [3] (lemma 4) mostrano che le classi di forme corrispondenti nell'isomorfismo di Dolbeault agli elementi di $H^{n-1}(U_\gamma - \{\gamma\}, \mathcal{O})$ sono rappresentate (a meno del segno) dalle seguenti serie uniformemente convergenti su ogni compatto di $U_\gamma - \{\gamma\}$:

$$(n-1)! \sum_{\alpha \in N^n} c_\alpha \psi_{\alpha+1}(z, \gamma) \tag{1}$$

dove $\lim_{|\alpha| \to \infty} \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha|} = 0$ e

$$\psi_\alpha(z, \gamma) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k)^{\alpha_k} d(\bar{z}_1 - \bar{\gamma}_1)^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k)^{\alpha_k}} \wedge \cdots \wedge d(\bar{z}_n - \bar{\gamma}_n)^{\alpha_n}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - \gamma_j|^{2\alpha_j}\right)^n}$$

è il nucleo di Bochner–Martinelli di tipo α con singolarità in γ.

Indichiamo con $\omega = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dz_i$, $B_\varepsilon(\gamma)$ una sfera di raggio ε e centro γ, e $S_\varepsilon(\gamma)$ la sua frontiera. La formula di Martinelli generalizzata (vedi [2]) dice che:

$$\int_{S_\varepsilon(\gamma)} f \psi_{\alpha+1} \wedge \omega = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\gamma) \tag{2}$$

per ogni funzione f olomorfa in un intorno di $\overline{B}$.

In virtù di questo teorema, esplicitando l'omomorfismo δ, abbiamo che $\delta([\psi_\alpha])$ è uguale a zero se $\alpha > 1$ e genera $H^n(T^n, \mathcal{O})$ se $\alpha = 1$. ($H^0(T^n, \Omega^n)$ duale di $H^n(T^n, \mathcal{O})$ ha dimensione 1 ed è definito dalle n-forme a coefficienti costanti in $\mathbf{C}^n$).

3. Dalla (2) abbiamo:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \gamma^\alpha} \int_{S_\varepsilon(\gamma)} f \psi_1(z, \gamma) \wedge \omega = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\gamma). \tag{3}$$

Pertanto osservando che

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \gamma^\alpha} \psi_1(z, \gamma) = (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_1(z, \gamma)}{\partial z^\alpha},$$

se poniamo $\phi_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_1}{\partial z^\alpha}$ dalla (2) e dalla (3) abbiamo

$$\int_{S_\varepsilon(\gamma)} f(\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha) \wedge \omega = 0 \tag{4}$$

per ogni funzione f olomorfa in un intorno di $\overline{B}$.

Ne segue la

PROPOSIZIONE 1. *$\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha$ è d''-esatta.*

Dimostrazione. Infatti $d''(\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha) = 0$, quindi $\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha$ definisce un elemento di $H^{n-1}(U_\gamma - \{\gamma\}, \mathcal{O})$, pertanto dalla (2) abbiamo $\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha = (n-1)! \sum_\beta c_\beta \psi_{\beta+1} + d''\sigma$ dove σ è una $(0, n-2)$-forma e $\lim_{|\beta|\to\infty} \sqrt[|\beta|]{c_\beta} = 0$; dalla (4) segue che per ogni funzione f olomorfa in $\overline{B}$

$$0 = \int_{S_\varepsilon(\gamma)} f\left((n-1)! \sum_\beta c_\beta \psi_{\beta+1} + d''\sigma\right) \wedge \omega =$$

$$\int_{S_\varepsilon(\gamma)} (n-1)! \sum_\beta c_\beta \psi_{\beta+1} \wedge \omega + \int_{S_\varepsilon(\gamma)} d(f\sigma \wedge \omega) = \sum_\beta (2\pi i)^n \frac{c_\beta}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial z^\beta}(\gamma).$$

Pertanto $c_\beta = 0 \ \forall\beta$ e $\psi_{\alpha+1} - \phi_\alpha = d''\sigma$.

Da un conto diretto si ricava la espressione esplicita della $\phi_\alpha(z, \gamma)$

$$\phi_\alpha(z, \gamma) = \frac{(|\alpha+1|-1)!}{(n-1)!(\alpha+1)!} \times \tag{5}$$

$$\times \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\alpha_k + 1)(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k)^{\alpha_k+1} \bigwedge_{j\neq k} d(\bar{z}_j - \bar{\gamma}_j)^{\alpha_j+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - \gamma_i|^2\right)^{|\alpha+1|}}.$$

OSSERVAZIONE. È opportuno notare che, sotto la condizione $\lim_{|\alpha|\to\infty} \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha|} = 0$, come la serie $\sum c_\alpha \psi_{\alpha+1}$, anche la serie $\sum c_\alpha \phi_\alpha$ converge uniformemente su ogni compatto di $C^n - \{\gamma\}$ e quindi definisce lo stesso elemento in $H^{n-1}(C^n - \{\gamma\}, \mathcal{O})$ Infatti se $\rho_1 \leqq \|z - \gamma\| \leqq \rho_2$ allora ogni coefficiente di $\phi_\alpha(z, \gamma)$ è maggiorato in norma da

$$\frac{|\alpha+1|!}{(n-1)!} \frac{-1}{(n-1)!} \rho_1^{-2|\alpha+1|} |\alpha+1|^n \prod_i |z_i - \gamma_i|^{\alpha_i+1} \leqq$$

$$\leqq \frac{n^{|\alpha+1|}}{(n-1)!} |\alpha+1|^n \rho_1^{-2|\alpha+1|} \rho_2^{|\alpha+1|}$$

e quindi le serie dei coefficienti sono maggiorate in norma da

$$\sum_{\alpha} |c_\alpha| \frac{n^{|\alpha+1|}}{(n-1)!} |\alpha+1|^n \rho_1^{-2|\alpha+1|} \rho_2^{|\alpha+1|}$$

e questa ultima converge per le condizioni poste sulle c_α e per il criterio della radice di Cauchy sulle serie multiple.

4. Sia Γ un reticolo di rango massimo in $\mathbf{C}^n$, abbiamo:

PROPOSIZIONE 2. *Se* $|\alpha| \geqq 2$ *la serie*

$$\mathscr{E}_\Gamma^\alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi_\alpha(z, \gamma) \tag{6}$$

converge uniformemente su ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Gamma$ *a una forma di tipo* $(0, n-1)$ *d''-chiusa e Γ-invariante.*

Dimostrazione. Proviamo che per $\|z\| \leqq \rho$ e $z \notin \Gamma$ le serie dei coefficienti della (6) convergono in norma.

Poiché $|\bar{z}_i - \bar{\gamma}_i| = |z_i - \gamma_i| \leqq \|z - \gamma\|$, posto $d_\alpha = \dfrac{|\alpha+1|^n n^{|\alpha+1|}}{(n-1)!}$, abbiamo che ogni coefficiente di $\phi_\alpha(z, \gamma)$ è maggiorato in norma da $d_\alpha \|z - \gamma\|^{-(|\alpha|+2n-1)}$.

Per tutti i $\gamma \in \Gamma$, eccetto al più un numero finito, si ha $\|\gamma\| > 2\rho$ e pertanto $\|z-\gamma\| \geqq \|\gamma\| - \|z\| > \frac{1}{2}\|\gamma\|$; quindi per tali valori di γ ogni coefficiente di $\phi_\alpha(z, \gamma)$ è maggiorato in norma da

$$d_\alpha \, 2^{|\alpha|+2n-1} \, |\gamma|^{-(|\alpha|+2n-1)} \tag{7}$$

D'altra parte è noto che la serie $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|^{-m}$ converge per $m > 2n$; infatti $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|^{-m} \leqq \sum_{i \geqq 1} \dfrac{a}{k^m i^{m-2n+1}}$ dove k è la minima distanza fra due vertici del reticolo ed a una costante che dipende solo dalla dimensione. Quindi per la (7) le serie dei coefficienti della (6) convergono in norma se $|\alpha| \geqq 2$. Infine, per la continuità dell'operatore d'', $\mathscr{E}_\Gamma^\alpha$ è d''-chiusa ed ovviamente Γ-invariante.

Analogamente abbiamo la

PROPOSIZIONE 3. *Se* $\lim_{|\alpha| \to \infty} \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha|} = 0$ *la serie*

$$\sum_{|\alpha| \geqq 2} c_\alpha \mathscr{E}_\Gamma^\alpha \tag{8}$$

converge uniformemente su ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Gamma$ *a una forma d''-chiusa e Γ-invariante.*

Dimostrazione. Come nella Proposizione 2, per tutti i γ tali che $\|\gamma\| > 2\rho$ abbiamo che le serie dei coefficienti della (8) sono maggiorate da

$$\sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\, d_\alpha\, 2^{|\alpha|+2n-1} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|^{-(|\alpha|+2n-1)}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\, d_\alpha\, 2^{|\alpha|+2n-1} \left(\sum_{i\geq 1} \frac{a}{k^{(|\alpha|+2n-1)}\, i^{|\alpha|}}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\, d_\alpha\, a\,(2/k)^{|\alpha|+2n-1} + \sum_{|\alpha|\geq 2} d_\alpha\, a\,|c_\alpha|\,(2/k)^{|\alpha|+2n-1}\left(\sum_{i\geq 2} i^{-2}\right)$$

e la convergenza di queste ultime segue dalle condizioni sulle c_α.

Notiamo infine che, per i valori di γ esclusi, vale l'osservazione fatta alla fine del terzo paragrafo.

5. Essendo Γ–invarianti, le serie $\mathscr{E}_\Gamma^\alpha$ e le serie (8) con esse formate definiscono classi di coomologia appartenenti a $H^{n-1}(T^n - \{0\}, \mathcal{O})$, tutte distinte perchè tali sono le loro restrizioni a $H^{n-1}(U_\gamma - \{\gamma\}, \mathcal{O})$. Queste restrizioni non esauriscono, però, ker δ: infatti a ker δ appartengono anche le classi definite da ϕ_α con $|\alpha| = 1$. Per tali classi il procedimento precedente va modificato.

Sia α^i il pluriindice tale che $\alpha_k^i = \delta_k^i$ e sia $\phi^i = \phi_{\alpha^i}$. Consideriamo la serie:

$$\mathscr{P}_\Gamma^i(z) = \phi^i(z, 0) + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq 0}} (\phi^i(z,\gamma) - G^i(\gamma)) \tag{9}$$

dove

$$G^i(\gamma) = \frac{n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, \overline{\gamma}_i\, \overline{\gamma}_k \bigwedge_{j\neq k} d\bar z_j}{\|\gamma\|^{2n+2}}\,.$$

Considerando che $\overline{\gamma}_i\overline{\gamma}_k = ((\overline{\gamma}_i - \bar z_i) + \bar z_i)((\overline{\gamma}_k - \bar z_k) + \bar z_k)$ con facili conti abbiamo

$$\mathscr{P}_\Gamma^i = \phi^i(z, 0) + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq 0}} \left[\frac{n(\|\gamma\|^{2n+2} - \|z-\gamma\|^{2n+2})}{(\|\gamma\|\,\|z-\gamma\|)^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\bar z_i - \overline{\gamma}_i)\times\right.$$

$$\left.\times(\bar z_k - \overline{\gamma}_k)\bigwedge_{j\neq k} d\bar z_j + \frac{n}{\|\gamma\|^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k((\bar z_i - \overline{\gamma}_i)\bar z_k + (\bar z_k - \overline{\gamma}_k)\bar z_i - \bar z_i \bar z_k)\bigwedge_{j\neq k} d\bar z_j\right].$$

Poiché $\|\gamma\| - \|z-\gamma\| \leq \|z\|$, $\left|\|\gamma\|^{2n+2} - \|z-\gamma\|^{2n+2}\right| \leq b\,\|z\|\,\|\gamma\|^{2n+1}$, con b opportuna costante. Pertanto, per $z \leq \rho$, le serie dei coefficienti delle $\mathscr{P}_\Gamma^i$ sono maggiorate in norma da $\sum_{\gamma\in\Gamma} c\,\rho\,\|\gamma\|^{-(2n+1)}$, con c opportuna costante; e dunque le $\mathscr{P}_\Gamma^i$ convergono uniformemente su ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Gamma$.

La Γ–invarianza della $\mathscr{P}_\Gamma^i$ si ottiene in maniera del tutto analoga alla invarianza della $\mathscr{P}$ di Weierstrass.

Le restrizioni a $U_\gamma - \{\gamma\}$ delle classi definite su $T^n - \{0\}$ dalle $\mathscr{P}_\Gamma^i$ e dalle $\mathscr{E}_\Gamma^\alpha$ generano ker δ, come spazio di Fréchet, e così si è ottenuta una rappresentazione esciplicita di $H^{n-1}(T^n - \{0\}, \mathcal{O})$.

OSSERVAZIONI:

1) Notiamo le formule:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \mathscr{E}_\Gamma^\alpha = -(\alpha_k + 1)\, \mathscr{E}_\Gamma^{\alpha+\alpha^k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \mathscr{P}_\Gamma^i = -(\alpha_k^i + 1)\, \mathscr{E}_\Gamma^{\alpha^i+\alpha^k}$$

perfettamente analoghe a quelle che legano la $\mathscr{P}$ di Weierstrass e le serie ordinarie di Eisenstein dei vari ordini.

2) Le serie $\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^m}$ $(n = 1)$ interessano soprattutto perchè danno un modo di costruire funzioni modulari, che si ottengono dalle somme $\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{\gamma^m}$. Niente di analogo si può sperare per $n \geqq 2$ se non si suppone almeno che il toro T^n sia algebrico.

Spero di tornare su questo argomento in altra occasione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e H. GRAUERT (1962) - *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. « Bull. Soc. Math. France », *90*, 193-259.

[2] A. ANDREOTTI e F. NORGUET (1966) - *Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *20*, 197-241.

[3] A. ANDREOTTI e F. NORGUET (1971) - *Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$-cohomology*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *25*, 69-114.

[4] J. FRENKEL (1957) - *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, « Bull. Soc. Math. France » *85*, 135-230.