Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuliana Lauro, Pasquale Renno

Sulla diffusione delle onde elettromagnetiche in un plasma «freddo»

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 124–129.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_124_0>

Fisica matematica. — *Sulla diffusione delle onde elettromagnetiche in un plasma «freddo»* (*). Nota di GIULIANA LAURO e PASQUALE RENNO, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The asymptotic properties of the threedimensional electromagnetic wave-propagation in a cold plasma model are studied. For all sufficiently large t, the electromagnetic field induced by initial data of compact support is at least $O(t^{-\frac{1}{2}})$, which is typical of diffusion.

1. In [1] abbiamo risolto il problema di Cauchy per un'equazione integrodifferenziale dell'elettromagnetismo ereditario lineare in tre dimensioni. Tale problema costituisce lo schema della propagazione di un campo elettromagnetico $[\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, t), \mathbf{H}(\boldsymbol{x}, t)]$ indotto da prefissati disturbi iniziali in un plasma «freddo» $\mathfrak{G}$ che riempie tutto lo spazio. Più precisamente, se indichiamo con Q l'insieme $R^3 \times \{t : t \geq 0\}$ e con Δ l'operatore di Laplace in R^3, il problema in questione è

$$\Delta\,\mathbf{E} - \mathbf{E}_{tt} - b\mathbf{E} + ab\int_0^t \exp\left[-a\,(t-\tau)\right]\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, \tau)\,d\tau = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \mathbf{E}_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x}) , \tag{1.2}$$

dove a e b sono costanti positive caratteristiche di $\mathfrak{G}$.

La soluzione delle (1.1)–(1.2) risulta espressa ([1]) in termini delle medie sferiche $\mathbf{M}_\varphi$, $\mathbf{M}_\psi$ dei dati iniziali sulla superficie della sfera $\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$ che ha il centro in $\boldsymbol{x}$ e raggio t (1).

L'esame di tale soluzione mostra, tra l'altro, che la trasmissione del segnale nel plasma $\mathfrak{G}$ risulta dalla sovrapposizione del campo

$$\mathbf{E}_1 = t\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[t\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t)\right] , \tag{1.3}$$

che è caratteristico di un mezzo senza conducibilità, e di un campo $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$ dovuto invece ad un fenomeno di diffusione, tipico dei mezzi dispersivi. Di conseguenza, quando il disturbo iniziale è «localizzato», mentre $\mathbf{E}_1$ è a supporto compatto, il campo $\mathbf{E}_2$ – a causa del fenomeno di diffusione – è invece diverso da zero in ogni punto di Q.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 14 giugno 1979.
(1) Ovviamente si è posto, senza alcuna restrizione, $c = 1$.

In questa Nota, continuando lo studio iniziato in [1], ci proponiamo di esaminare le proprietà asintotiche del campo $\mathbf{E}$, nell'ipotesi che i dati iniziali φ e ψ siano a supporto compatto. In proposito, per quel che riguarda $\mathbf{E}_1$, ricordiamo ([2]) che, al crescere di t, mentre il supporto di $\mathbf{E}_1$ si dilata, in ogni suo punto risulta

$$\mathbf{E}_1(\boldsymbol{x}, t) = O(t^{-1}) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \operatorname{supp} |\mathbf{E}_1| . \tag{1.4}$$

Passando poi all'esame di $\mathbf{E}_2$, un'opportuna analisi dei nuclei che intervengono nella formula risolutiva (N. 2) consente di affermare che $\mathbf{E}_2$ è almeno dell'ordine di $t^{-\frac{1}{2}}$ in ogni punto dello spazio. E ciò, come è noto, è tipico dei fenomeni di diffusione. Per la soluzione $\mathbf{E}$ del problema (1.1) – (1.2), sussiste infatti (N. 3) il seguente

TEOREMA 1.1. *Se φ e ψ sono tali che*

$$(\varphi, \psi) \in C_0^3(R^3) \times C_0^2(R^3) \tag{1.i}$$

risulta, uniformemente rispetto ad $\boldsymbol{x}$,

$$|\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, t)| \leq c_1 t^{-1} + c_2 t^{-\frac{1}{2}}(1 + t^{-1}) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in R^3 , \tag{1.5}$$

dove le costanti c_1 e c_2 dipendono solo da a e b.

Vogliamo ringraziare il prof. D. Graffi per le utili discussioni avute.

2. In base a quanto abbiamo dimostrato in [1], se i dati iniziali φ e ψ verificano le ipotesi

$$(\varphi, \psi) \in C^3(R^3) \times C^2(R^3) , \tag{2.i}$$

esiste una ed una sola soluzione di classe $C^2(Q)$ del problema (1.1) – (1.2). Se r è una variabile scalare definita nell'intervallo $[0, t]$, indichiamo con $\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)$ la media sferica di φ sulla superficie della sfera $\Gamma(\boldsymbol{x}, r)$; sia poi $f(r, t)$ la funzione cosi definita:

$$f(r, t) = f_1(r, t) - (br/2) \int_r^t f_2(r, t, z)\, dz , \tag{2.1}$$

dove

$$f_1(r, t) = (\omega/2)(t - r)^{-1} J_1(\omega) \exp[-a(t - r)] \tag{2.2}$$

$$f_2(r, t, z) = (z^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} J_1(\xi) J_1(\eta) \exp[-a(t - z)] . \tag{2.3}$$

Nelle (2.2) – (2.3) si è posto per brevità

$$\omega = [2br(t - r)]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \xi = [b(t - z)(z + r)]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \eta = [b(t - z)(z - r)]^{\frac{1}{2}} , \tag{2.4}$$

mentre J_1 indica la funzione di Bessel di prima specie. Con tali notazioni, la soluzione del problema in esame si scrive:

$$(2.5)\qquad \mathbf{E}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{E}_1(\boldsymbol{x}, t) - \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r - $$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r ,$$

con il campo $\mathbf{E}_1$ definito dalla (1.3).

Per dimostrare il Teorema 1.1 occorre stabilire alcune formule di maggiorazione per i nuclei f ed f_t che intervengono nella definizione (2.5) di $\mathbf{E}$. A tale scopo premettiamo un'opportuna espressione di f_t. Mediante le formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel è facile verificare che

$$(2.6)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{t} f_1\right) + rh(r, t) + (b\omega/8)\, J_1(\omega) \exp[-a(t-r)]$$

$$(2.7)\qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\frac{\partial f_2}{\partial z} - g(r, t, z),$$

dove si è posto

$$(2.8)\qquad h(r, t) = t^{-1}[b\, J_0(\omega) - (4a + bt)(\omega/8r)\, J_1(\omega)] \exp[-a(t-r)]$$

$$(2.9)\qquad g(r, t, z) = \frac{b(t-z)}{2(z^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} \exp[-a(t-z)]\, \cdot$$

$$\cdot\, [\xi^{-1} J_2(\xi)\, J_1(\eta) + \eta^{-1} J_2(\eta)\, J_1(\xi)]\, .$$

Pertanto, se deriviamo la (2.1) rispetto al tempo ed applichiamo la (2.7), si ricava

$$(2.10)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + (br/2)\int_r^t g(r, t, z)\, \mathrm{d}z - (br/2) f_2(r, t, r)\, .$$

Osservando che

$$f_2(r, t, r) = (\omega/4r)\, J_1(\omega) \exp[-a(t-r)]\, ,$$

dalle (2.6) – (2.10) si ottiene infine:

$$(2.11)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{t} f_1\right) + rh(r, t) + (br/2)\int_r^t g(r, t, z)\, \mathrm{d}z\, .$$

Dimostriamo ora il seguente lemma.

LEMMA 2.1 *Per ogni $t > 0$ risulta*

$$\int_0^t r^{-1} |f(r, t)| \, dr \leq a_1 t^{-\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

$$\int_0^t dr \int_r^t |g(r, t, z)| \, dz \leq a_2 t^{-\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

con a_1 e a_2 costanti che dipendono da a e b.

Dimostrazione. Se y è una variabile reale positiva, in base alle relazioni ([3])

$$|J_n(y)| \leq 1 \quad , \quad |J_n(2y)| \leq y^n/n! \tag{2.14}$$

$$|J_n(y)| \leq \alpha_n y^n (1 + y)^{-n-\frac{1}{2}}, \tag{2.15}$$

è facile verificare che esiste una costante positiva β tale che

$$r^{-1} |f(r, t)| \leq b^{\frac{1}{2}} \beta [r(t-r)]^{-\frac{1}{2}} \exp[-a(t-r)] + \tag{2.16}$$
$$+ b\beta \int_r^t \frac{\exp[-a(t-z)]}{(t-z)^{\frac{1}{2}} (z^2 - r^2)^{3/4}} \, dz .$$

D'altra parte ([3]), se I_λ è la funzione modificata di Bessel di prima specie, si ha

$$\int_0^{2y} \frac{\exp(-pu)}{(2yu - u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \, du = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda + \tfrac{1}{2}) (2y/p)^\lambda \exp(-py) I_\lambda(py) \tag{2.17}$$
$$(Re(\lambda) > -\tfrac{1}{2})$$

per cui, quando si integra la (2.16), si ottiene

$$\int_0^t r^{-1} |f(r, t)| \, dr \leq b^{\frac{1}{2}} \pi\beta \exp(-at/2) I_0(at/2) + \tag{2.18}$$
$$+ b\beta \int_0^t \frac{\exp[-a(t-z)]}{[z(t-z)]^{\frac{1}{2}}} \, dz \int_0^1 (1 - r^2)^{-3/4} \, dr .$$

Pertanto, se applichiamo ancora la (2.17) e ricordiamo ([3]) che

$$|I_\lambda(z)| \leq c_\lambda |z|^{-\frac{1}{2}} \exp|Re(z)| \qquad (Re(\lambda) > -\tfrac{1}{2}), \tag{2.19}$$

si ricava facilmente la (2.12). Per quanto riguarda poi la (2.13), osserviamo che la (2.15) implica [2]

$$| J_1(\eta)\, J_2(\xi) | \leq \alpha_1\, \alpha_2\, (\xi/\eta)^{\frac{1}{2}}$$

$$| J_1(\xi)\, J_2(\eta) | \leq \alpha_1\, \alpha_2\, (\eta/\xi)^{\frac{1}{2}},$$

per cui, essendo ([4]) anche

$$\exp\left[-a\,(t-z)/2\right] \leq 2\,[ae\,(t-z)]^{-1} \qquad \forall t \geq z, \tag{2.20}$$

risulta

$$\int_r^t | g(t, r, z) |\, dz \leq k \int_r^t \frac{\exp\left[-a\,(t-z)/2\right]}{(t-z)^{\frac{1}{2}}\,(z^2-r^2)^{3/4}}\, dz .$$

Integrando rispetto ad r ed applicando le (2.17) – (2.19), si perviene alla (2.13).

Osservazione 2.1. Riportiamo infine un'altra formula di maggiorazione che dovremo applicare al N. 3 e che peraltro segue facilmente dalla (2.17) – (2.19):

$$\int_0^t [r/(t-r)]^{\pm\frac{1}{2}} \exp\left[-a\,(t-r)\right] dr \leq a_3\, t^{\pm\frac{1}{2}}, \tag{2.21}$$

dove a_3 è una costante che dipende solo da a. In particolare, nel caso della potenza ad esponente negativo, tale relazione si ricava osservando che

$$0 < I_0(y) - I_1(y) \leq 2\, y^{-1}\, I_1(y) \qquad (y \text{ reale positivo}).$$

3. Dimostriamo ora il Teorema 1.1. A tale scopo indichiamo con $\mathbf{\Lambda}$ un qualunque insieme di R^3 che contiene i supporti delle componenti di φ e ψ. Per fissare le idee assumiamo che $\mathbf{\Lambda}$ coincida con la sfera $\Gamma(\boldsymbol{x}_0, \rho)$, con $\boldsymbol{x}_0 \in R^3$ e $\rho \in]0, \infty[$. Com'è noto, nelle ipotesi (1.i) sui dati iniziali, risulta

$$\begin{aligned} &| t\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t) | \leq k_1\, t^{-1}, \quad | t\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, t) | \leq k_2\, t^{-1} \\ &\left| \frac{\partial}{\partial t}\, [t\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t)] \right| \leq k_3\, t^{-1} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in R^3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove le costanti k_i dipendono da ρ e dai massimi che i moduli di φ e ψ e delle loro derivate prime assumono nei relativi supporti (cfr. [2] pp. 103–109).

(2) Basta osservare che dalla (2.15) si trae anche

$$| J_2(y) | \leq \alpha_2\, y^2\, (1+y)^{-5/2} \leq \alpha_2\, y^{\frac{1}{2}} \qquad (y \text{ reale positivo})$$

Dalle (2.5) – (2.12) – (3.1) si ottiene pertanto

$$(3.2) \qquad |\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, t)| \le (k_2 + k_3)\, t^{-1} + a_1 k_2 t^{-\frac{1}{2}} + \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r \right| .$$

Resta quindi da maggiorare l'integrale al secondo membro di tale relazione; se calcoliamo f_t mediante la (2.11) ed integriamo per parti, osservando che $f_1(t, t) = f(t, t)$ e che $f_1(0, t) = 0$, si ricava

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r = t^{-1} \int_0^t r f_1(r, t) \frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{M}_\varphi)\, \mathrm{d}r +$$

$$+ \int_0^t r^2 \mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r) \left[h(r, t) + (b/2) \int_r^t g(t, r, z)\, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}r .$$

In base alle (3.1) – (2.13) si ha

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r \right| \le k_3 t^{-1} \int_0^t |f_1(r, t)|\, \mathrm{d}r +$$

$$+ k_1 \int_0^t |h(r, t)|\, \mathrm{d}r + b k_1 a_2 t^{-\frac{1}{2}} .$$

D'altra parte, ricordando le definizioni (2.2) – (2.8) di f_1 e di h e maggiorando $|J_0|$ e $|J_1|$ mediante la $(2.14)_1$ si trae

$$\int_0^t |f_1(r, t)|\, \mathrm{d}r \le b^{\frac{1}{2}} \int_0^t r^{\frac{1}{2}} (t - r)^{-\frac{1}{2}} \exp[-a(t - r)] ,$$

$$\int_0^t |h(r, t)|\, \mathrm{d}r \le b^{\frac{1}{2}} t^{-1} \int_0^t [b^{\frac{1}{2}} + (4a + bt)(t - r)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}] \exp[-a(t - r)]\, \mathrm{d}r .$$

Basta ora applicare la formula di maggiorazione (2.21) a tali integrali (cfr. Osservazione 2.1), per completare la dimostrazione del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. LAURO e P. RENNO (1979) – *Sul principio di Huyghens in un plasma «freddo»*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, *66*, fasc. 6 (Giugno).
[2] F. JOHN (1978) – *Partial differential equations*, Springer Verlag New–York, III edizione.
[3] C. N. WATSON (1966) – *A treatise on the theory of Bessel function*, Cambridge at the University Press, II edizione.
[4] D. S. MITRINOVIC (1970) – *Analytic inequalities*, Springer Verlag Berlin.