Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Lanteri

Su un teorema di Chisini

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.6, p. 523–532.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_6_523_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Geometria. — *Su un teorema di Chisini* (*). Nota di ANTONIO LANTERI (**), presentata (***) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — Two general multiple planes having the same branch curve cannot be too " different ". As it is well known, a central result in the theory of multiple planes, first proved by Chisini in [3], asserts that two such multiple planes, with some additional hypothesis, are birational.

In this paper we prove, with a different additional hypothesis, that two general multiple planes having the same branch curve are isomorphic.

Let S be a complex projective non-singular algebraic surface, R a net on S, $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ the associated multiple plane. Firstly we prove that if the moving divisor of R is ample, then the ramification curve Γ of Φ is ample too. So, $S \setminus \Gamma$ is Stein. Now, let $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ and $\Phi' : S' \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ be two general multiple planes having the same branch curve and such that the moving divisors of the corresponding nets are ample. Then the previous result allows us to extend to S and S′ an isomorphism $f : U_\Gamma \to U'_{\Gamma'}$, between two tubular neighbourhoods of the ramification curves Γ and Γ'.

INTRODUZIONE

Questo lavoro riprende un classico risultato di Chisini (cfr. [3]) concernente la birazionalità di due piani multipli generali aventi la stessa curva di diramazione.

In [3], questo risultato, fondamentale nella teoria dei piani multipli dal punto di vista birazionale, è provato sotto alcune ipotesi concernenti il modo di degenerare della curva di diramazione. In un successivo lavoro (cfr. [4]) in cui il problema della birazionalità di due spazi multipli aventi la stessa varietà di diramazione viene ricondotto all'analogo problema per i piani multipli, Chisini, tornando sulle ipotesi del suo teorema, auspica, nella speranza di poterle rimuovere (1), la possibilità di conseguire per vie diverse il risultato.

In questo lavoro, sotto un'ipotesi che, a differenza di quella di Chisini, concerne solo il piano multiplo e non il suo modo di degenerare, si prova un teorema di isomorfismo: precisamente si dimostra l'isomorfismo di due piani multipli generali aventi la stessa curva di diramazione, nell'ipotesi che sia ampio il divisore della parte mobile delle reti rispettivamente associate. Il teorema è conseguito estendendo una corrispondenza biregolare tra due intorni delle rispettive curve di contatto. Il risultato locale che afferma l'esistenza di

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dell G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Istituto matematico « F. Enriques » - Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano.

(***) Nella seduta del 14 giugno 1979.

(1) Che però « il supposto teorema generale non sia, probabilmente, vero » (cioè senza alcuna ipotesi sui piani multipli generali) è il parere di Chisini espresso nello stesso lavoro [4], confortato in questo anche dalla « opinione un autorevole maestro ».

una tale corrispondenza è di Chisini ([3]), ma, nella dimostrazione che egli dà del teorema di birazionalità, non viene utilizzato. L'estensione di questa corrispondenza biregolare è resa possibile dal fatto che, nell'ipotesi qui formulata, si dimostra che la curva di contatto di un piano multiplo generale è ampia, da ciò conseguendo che il suo complementare è una superficie di Stein.

Il lavoro si compone di quattro paragrafi. Nei nn. 1 e 2 si richiamano alcune generalità sui piani multipli ed il risultato locale di Chisini; nel n. 3 si studia l'ampiezza della curva di contatto di un piano multiplo generale. Infine, al n. 4, utilizzando alcune proprietà elementari delle varietà di Stein, si prova il teorema fondamentale.

1. – Col termine superficie si intenderà superficie algebrica proiettiva, complessa, liscia, ad eccezione che nel n. 4, ove il termine superficie designerà, più in generale, una varietà analitica complessa bidimensionale liscia. Sia S una superficie e sia Div (S) il gruppo dei divisori su S. Col simbolo $(D \cdot D')$ si denoterà l'indice di intersezione di due divisori $D, D' \in \mathrm{Div}(S)$.

Siano S una superficie, D un divisore molto ampio su S e si identifichi S con la sua immagine nella immersione in $\mathbf{P}^r$ ($r = \dim |D|$) definita dal sistema lineare completo $|D|$.

Sia $R \subseteq |D|$ una rete; indicata con Θ la sua parte fissa, ogni divisore $D \in R$ può scriversi nella forma $D = \Theta + H$ con $H > 0$ e, alla rete R è perciò canonicamente associata la rete, che si denoterà con $R - \Theta$, i cui elementi sono i divisori $H = D - \Theta$ $(D \in R)$. Per piano multiplo si intenderà qui l'applicazione razionale $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ associata alla rete R [(2)]. Tale applicazione può interpretarsi come la proiezione di S da un sottospazio $(r-3)$-dimensionale L di $\mathbf{P}^r$ su di un piano sghembo con esso. Questa proiezione si può ottenere proiettando prima S da un sottospazio $(r-4)$-dimensionale in un $\mathbf{P}^3$ e quindi proiettando la superficie S' così ottenuta (in generale dotata di curva doppia nodale), da un punto su di un piano. Di qui l'immediato riscontro con il concetto classico di piano multiplo. Se b è il numero di punti base della rete R, l'ordine del piano multiplo $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ è, naturalmente, $n = (H^2) - b$.

Siano Γ la jacobiana della rete $R - \Theta$ e Δ la curva di diramazione del piano multiplo $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$. Indicato con K un divisore canonico di S, si ha (cfr. ad esempio [9], p. 429) (denotando con $\equiv$ il simbolo dell'equivalenza lineare)

$$\Gamma \equiv 3H + K .$$

(2) Si noti che l'ipotesi fatta sulla rete R non costituisce alcuna restrizione. Se $R' = (H)$ è una qualunque rete su S, si può sempre ritenere che sia $R' = R - \Theta$ ove R è una rete contenuta in una sistema lineare completo molto ampio. Infatti, se $A \in \mathrm{Div}(S)$ è ampio, esistono interi n_0 ed n_1 tali che, per $n \geq n_0$ il fascio invertibile $\mathcal{O}_S(H + nA)$ è generato dalle sezioni globali e, per $n \geq n_1$, nA è molto ampio; allora, posto $\Theta = nA$, con $n \geq n_0 + n_1$, il divisore $H + \Theta$ è molto ampio (cfr. [7], p. 169, Ex. 7.5), e, posto $R = \{\Theta + H \mid H \in R'\}$ si ha ovviamente $R' = R - \Theta$.

Inoltre, con riferimento alla immagine in $\mathbf{P}^3$, Γ rappresenta la curva di contatto del cono circoscritto alla superficie S' dal punto di proiezione, e Δ ne è la proiezione.

Per un $(r-3)$–spazio L generico (in un aperto della grassmaniana $\mathrm{Grass}(r-3, r)$) si ha (cfr. ad esempio [10], p. 131) che

i) Γ *è una curva liscia irriducibile*;

ii) Δ *non ha singolarità superiori a nodi e cuspidi.*

Per poter applicare alcuni risultati di Chisini (cfr. [3], pp. 341–345) richiamati al n. 2, è necessario ritenere che il piano multiplo $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ soddisfi, oltre alle i) e ii), le ipotesi seguenti:

iii) *Ogni nodo di* Δ *corrisponde ad un fascio della rete* R *costituito da curve tra loro bitangenti, ossia da un* $(r-2)$*–spazio proiettante (per* L*) bitangente ad* S.

iv) *Ogni cuspide di* Δ *corrisponde ad un fascio della rete* R *costituito da curve aventi contatto tripunto, ossia ad un* $(r-2)$*–spazio proiettante avente con* S *un contatto tripunto.*

Un piano multiplo siffatto si dirà, per brevità, *generale* (sulla effettiva generalità delle ipotesi iii) e iv), si veda ad esempio [3], p. 340); per i legami che nel caso di un piano multiplo generale intercorrono tra i caratteri numerici di S, R e Δ, si veda [6], pp. 20–21.

2. – Sia $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ un piano multiplo generale e siano Δ la curva di diramazione e Γ la jacobiana della rete $R - \Theta$ canonicamente associata alla rete R.

Sia $p_0 \in \mathbf{P}^2 \setminus \Delta$, e, per ogni $p \in \mathbf{P}^2 \setminus \Delta$, sia $L(p)$ la retta del fascio di centro p_0 passante per p. A partire da un ordinamento arbitrariamente prefissato di $\Phi^{-1}(p_0)$, con una opportuna convenzione nel considerare i cammini da p_0 a p in $L(p) \setminus \Delta$ si può ordinare, per continuità, l'insieme $\Phi^{-1}(p)$. Sia $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ l'ordinamento di $\Phi^{-1}(p)$.

Sia V un intorno di Δ e per ogni $p \in V \setminus \Delta$ sia V_p la componente connessa di $V \cap L(p)$ contenente p. Sia poi

$$\Sigma = \{p \in V \mid V_p \cap \Delta \in \mathrm{Sing}\, \Delta\}.$$

Per ogni $p \in V \setminus (\Sigma \cup \Delta)$, si consideri l'omomorfismo di monodromia

$$\mu : \Pi_1(V_p \setminus \Delta, p) \to \mathrm{Aut}(\Phi^{-1}(p)); \tag{2.1}$$

se γ è un cappio elementare in $V_p \setminus \Delta$ e $[\gamma]$ denota la sua classe di omotopia, allora $\mu([\gamma]) = S(B_i, B_j)$ è lo scambio individuato dai punti B_i e B_j che, al tendere di p in V_p al punto di $L(p) \cap \Delta$ circondato da γ, vengono ad identificarsi in un unico punto di Γ. Sia

$$T = \bigcup_{p \in V \setminus \Sigma} \{B_i \in \Phi^{-1}(p) \mid S(B_i, B_j) = \mu([\gamma])\}$$

e sia $\overline{T}$ la sua chiusura in S. Sia V tale che per ogni $p \in V \setminus (V_{Sing\,\Delta} \cup \Delta)$, $V_{Sing\,\Delta}$ denotando un intorno dei punti singolari di Δ, $\Pi_1(V_p \setminus \Delta, p)$ sia generato da una sola classe $[\gamma]$. Allora, essendo Φ un piano multiplo generale, le condizioni di invarianza di Enriques (cfr. [5]) consentono di provare (cfr. [3], p. 342) che $U_\Gamma = \operatorname{Int} \overline{T}$ è un intorno tubolare di Γ.

TEOREMA 2.1 ([3], p. 346). *Siano* $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$, $\Phi' : S' \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ *due piani multipli generali con la stessa curva di diramazione* Δ, *e siano* Γ *e* Γ' *le jacobiane delle corrispondenti reti* $R - \Theta$, $R' - \Theta'$. *Esistono intorni tubolari* U_Γ *e* $U'_{\Gamma'}$ *di* Γ *e* Γ' *rispettivamente, in* S *e in* S', *un intorno* V *di* Δ *in* $\mathbf{P}^2$ *ed un isomorfismo* $h : U_\Gamma \to U'_{\Gamma'}$, *che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} U_\Gamma \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, dashed, "\Phi_{|U_\Gamma}"'] & & U'_{\Gamma'} \arrow[dl, dashed, "\Phi'_{|U'_{\Gamma'}}"] \\ & V & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Dimostrazione. – Siano U_Γ ed $U'_{\Gamma'}$ intorni tubolari di Γ e di Γ' relativi ad uno stesso intorno V della curva di diramazione Δ; con le stesse notazioni usate più sopra, sia $p \in V \setminus (V_{Sing\,\Delta} \cup \Delta)$, sia $[\gamma]$ il generatore di $\Pi_1(V_p \setminus \Delta, p)$, e siano μ e μ' gli omomorfismi (2.1) relativi rispettivamente ai piani multipli Φ e Φ'. La corrispondenza che alla coppia di punti B_i, B_j di $U = U_\Gamma \setminus \Gamma$, ove $S(B_i, B_j) = \mu([\gamma])$, associa la coppia di punti di $U' = U'_{\Gamma'} \setminus \Gamma'$ individuati dallo scambio $\mu'([\gamma])$ si estende per continuità a tutti i punti $p \in V \setminus \Delta$. Mediante una complessa analisi topologica dei cammini in $V \setminus \Delta$, in particolare dei cammini che avvolgono una cuspide (cfr. [2]), e utilizzando le condizioni di invarianza di Enriques [3], Chisini ha provato (cfr. [3]), pp. 343–345) che tale corrispondenza (di tipo [2, 2]) si scinde in due corrispondenze biunivoche. Sia f una di tali corrispondenze; per costruzione è evidente che $\Phi' \circ f_{|U} = \Phi_{|U}$. Allora, per ogni $q \in U$ esiste un intorno sufficientemente piccolo N_q di q, tale che sia

$$f_{|N_q} = \Phi'^{-1} \circ \Phi_{|N_q}. \tag{2.3}$$

Poiché $\Phi_{|U}$ e $\Phi'_{|U'}$ sono dei biolomorfismi locali, dalla (2.3) risulta che f (e naturalmente f^{-1}) è olomorfa. Tenuto conto dell'isomorfismo $\omega : \Gamma \to \Gamma'$ che

(3) Per utilizzare tali condizioni è indispensabile l'ipotesi che i piani multipli siano generali, e particolarmente, per le condizioni iii) e iv). Sia ad esempio Φ il piano triplo definito dalla proiezione di una cubica $S_3 \subset \mathbf{P}^3$ da un punto esterno. La curva di diramazione Δ è, com'è noto, una sestica con sei cuspidi; sia Φ' il piano doppio definito da $z^2 = f$, $f = 0$ essendo l'equazione di Δ. Φ' non verifica la condizione iv), essendo un piano doppio. Inoltre non può sussistere alcuna corrispondenza biunivoca tra U ed U' che renda commutativo il diagramma (2.2). Infatti, per un punto $p \in V \setminus \Delta$ prossimo ad una cuspide di Δ, è $\operatorname{Card}(\Phi^{-1}(p) \cap U) = 3$, mentre $\operatorname{Card}(\Phi'^{-1}(p) \cap U') = 2$.

l'applicazione birazionale $\Phi'^{-1}_{|\Gamma'} \circ \Phi_{|\Gamma}$ definisce, si prolunghi f per continuità ponendo

$$h(p) = \begin{cases} f(p) & \text{se } p \in \mathrm{U} \\ \omega(p) & \text{se } p \in \Gamma. \end{cases}$$

Allora $h : \mathrm{U}_\Gamma \to \mathrm{U}'_{\Gamma'}$ è un isomorfismo e rende commutativo il diagramma (2.2).

3. – Sia $\Phi : \mathrm{S} \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ il piano multiplo associato ad una rete R, e sia $\mathrm{H} \in \mathrm{R} - \Theta$ il divisore della parte mobile. In questo n. si prova che se il piano multiplo Φ è generale (cfr. n. 1) ed H è ampio, allora la curva Γ, jacobiana della rete $\mathrm{R} - \Theta$, è pure ampia.

Sia S una superficie e, per ogni $\mathrm{D} \in \mathrm{Div}(\mathrm{S})$, si ponga $h^i(\mathrm{D}) = h^i(\mathrm{S}, \mathcal{O}_\mathrm{S}(\mathrm{D}))$ $(i = 0, 1, 2)$. Se C è una curva irriducibile in S, con $g(\mathrm{C})$ si denoterà il suo genere, si porrà cioè $g(\mathrm{C}) = \dim_\mathbf{C} \mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathcal{O}_\mathrm{C})$. Per l'analisi del caso rigato è utile il seguente

LEMMA 3.1. – *Siano* S *una superficie rigata di irregolarità* q *e* C *una curva irriducibile in* S *tale che* $(\mathrm{C}^2) > 0$ *e* $(\mathrm{C} \cdot \mathrm{K}) < 0$. *Risulta*

$$h^0(\mathrm{C}) \geq 1, \tag{3.1}$$

valendo il segno = se e solo se è $(\mathrm{C} \cdot \mathrm{K}) = -1$, $g(\mathrm{C}) = q > 0$, $h^1(\mathrm{C}) = 0$.

Dimostrazione. – Se è $\mathrm{S} = \mathbf{P}^2$, la (3.1) vale sempre col segno $>$. Sia $\mathrm{S} \neq \mathbf{P}^2$. Allora è immediato osservare che S domina una superficie geometricamente rigata S′. Considerato il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

ove f è un morfismo birazionale (eventualmente un isomorfismo) e $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{B}$ è la proiezione della rigata geometrica S′ sulla sua curva base B, si ha $\lambda(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$, oppure $\lambda(\mathrm{C}) = b \in \mathrm{B}$. Nel primo caso è necessariamente $g(\mathrm{C}) \geq g(\mathrm{B}) = q$, mentre nel secondo caso C è contenuta in una fibra della fibrazione λ, ed è allora immediato verificare che è $(\mathrm{C}^2) \leq 0$. Nelle ipotesi fatte è perciò $g(\mathrm{C}) \geq q$. Dalla formula del genere si ha

$$(\mathrm{C}^2) = 2g(\mathrm{C}) - 2 - (\mathrm{C} \cdot \mathrm{K}); \tag{3.2}$$

poiché C è un divisore effettivo ed S è rigata, si ha inoltre $h^2(\mathrm{C}) = 0$. Pertanto dal teorema di Riemann-Roch si trae

$$\begin{aligned} h^0(\mathrm{C}) &= h^1(\mathrm{C}) + 1 - q + \tfrac{1}{2}((\mathrm{C}^2) - (\mathrm{C} \cdot \mathrm{K})) = \\ &= h^1(\mathrm{C}) + (g(\mathrm{C}) - q) - (\mathrm{C} \cdot \mathrm{K}). \end{aligned}$$

Ne consegue che nella (3.1) vale il segno $=$ se e solo se è $(C \cdot K) = -1$, $g(C) = q$ e $h^1(C) = 0$. In tal caso, tenuto conto della (3.2) e dell'ipotesi $(C^2) > 0$, deve pure essere $q > 0$.

TEOREMA 3.1. – *Sia* $\Phi : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ *un piano multiplo generale. Se il divisore* $H \in R - \Theta$ *è ampio, la curva* Γ *jacobiana della rete* $R - \Theta$ *è pure ampia.*

Dimostrazione. – Si ha innanzitutto (cfr. [9], p. 429)

$$\Gamma \equiv 3H + K, \tag{3.3}$$

K essendo un divisore canonico di S. Poiché Φ è un piano multiplo, se b denota il numero dei punti base della rete R deve aversi

$$(H^2) - b \geq 2. \tag{3.4}$$

Poiché Γ è una curva irriducibile, dalla formula del genere, si ha

$$(\Gamma^2) + (\Gamma \cdot K) = 2g(\Gamma) - 2; \tag{3.5}$$

d'altra parte, per la (3.3), è

$$(\Gamma^2) - (\Gamma \cdot K) = 6(H^2) + 6(g(H) - 1)\ ^{(4)}. \tag{3.6}$$

Sommando le (3.5) e (3.6), si trae

$$(\Gamma^2) = 3(H^2) + 3(g(H) - 1) + g(\Gamma) - 1. \tag{3.7}$$

Tenuto conto della (3.4) risulta perciò

$$(\Gamma^2) > 0. \tag{3.8}$$

Sia ora C una curva irriducibile in S; si danno i casi seguenti.

1° caso. – Sia S non rigata. Esiste un plurigenere $P_n \neq 0$, cioè esiste un intero n tale che nK è banale o positivo. Allora, se è $(C^2) > 0$, si ha $(C \cdot K) \geq 0$; se invece è $(C^2) \leq 0$, dalla formula del genere, si ha

$$(C \cdot K) = 2g(C) - 2 - (C^2) \geq -2; \tag{3.9}$$

in ogni caso, tenuto conto della (3.3), per l'ampiezza di H, si ha

$$(\Gamma \cdot C) = 3(H \cdot C) + (K \cdot C) > 0. \tag{3.10}$$

Dalle (3.8) e (3.10), per il criterio di Nakai-Moishezon (cfr. ad esempio [7], p. 365), consegue l'ampiezza di Γ.

2° caso. – Sia S rigata. Se è $(C \cdot K) \geq 0$, dall'ampiezza di H si trae immediatamente la (3.9). Sia $(C \cdot K) < 0$. Se è $(C^2) \leq 0$, dalla formula del genere si ha ancora la (3.9) e ne consegue perciò la (3.10). Sia $(C \cdot K) < 0$ e $(C^2) > 0$.

(4) Poiché Φ è un piano multiplo generale, il generico divisore $H \in R - \Theta$ è una curva irriducibile.

In base al Lemma 3.1, o $|C|$ è almeno un fascio, oppure è $(C \cdot K) = -1$; in questo ultimo caso, sempre per l'ampiezza di H sussiste la (3.10). Sia ora $\lambda : S \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ l'applicazione razionale associata ad un fascio $F \subseteq |C|$ e si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ S \arrow[r, dashed] & \mathbf{P}^1 \end{tikzcd}$$

che si ottiene scoppiando i punti base del fascio F. Se Γ sega C nei punti base di F, la condizione

$$(3.11) \qquad (\Gamma \cdot C) > 0$$

è banalmente verificata. In caso contrario, indicate con Γ' e C' rispettivamente le trasformate proprie, mediante il morfismo birazionale g, di Γ e di C, si ha

$$(3.12) \qquad (\Gamma'^2) = (\Gamma^2) \quad \text{e} \quad (\Gamma' \cdot C') = (\Gamma \cdot C) .$$

Poiché C è una fibra di ψ, si ha

$$(3.13) \qquad (\Gamma' \cdot C') > 0 ,$$

a meno che Γ' non sia componente di una fibra di ψ, $F \equiv C'$. In tal caso il divisore $F - \Gamma' \equiv C' - \Gamma'$ è effettivo, e perciò $(C' - \Gamma' \cdot \Gamma') \geq 0$. Si ha dunque $(C' \cdot \Gamma') \geq (\Gamma'^2)$. Ricordando la (3.8), dalla prima delle (3.12), si trae ancora la (3.13). Dunque anche nel caso rigato, dal criterio di Nakai–Moishezon, consegue l'ampiezza di Γ.

OSSERVAZIONE 3.1. – *Se* S *è non rigata, il risultato del Teorema 3.1 può essere provato indipendentemente dall'ipotesi che* Φ *sia un piano multiplo generale.*

Per mostrare ciò è sufficiente provare che, nell'ipotesi che H sia ampio, risulta $(\Gamma^2) > 0$.

Se S è minimale non rigata, si ha $(K^2) \geq 0$ e $(K \cdot C) \geq 0$ per ogni curva irriducibile C in S. Ne consegue che è

$$(3.14) \qquad 6(H \cdot K) + (K^2) \geq 0 ,$$

e perciò, $(\Gamma^2) = 9(H^2) + 6(H \cdot K) + (K^2) > 0$.

Siano S ed S' due superfici, $\sigma : S \to S'$ lo scoppiamento di centro $p' \in S'$, E la curva eccezionale corrispondente; è immediato provare che $H \in \mathrm{Div}(S)$ è ampio se e solo se è della forma

$$(3.15) \qquad H = \sigma^* H' - hE$$

ove $H' \in \mathrm{Div}(S')$, h è un intero positivo e $(H'^2) > h^2$, $(H' \cdot C') > rh$ per ogni curva irriducibile C' in S' che ha p' come punto di molteplicità r. Se K e K' sono divisori canonici su S ed S', ed H e H' sono come nella (3.15), si verifica immediatamente che è

$$(3.16) \qquad 6\,(\mathrm{H}\cdot\mathrm{K}) + (\mathrm{K}^2) > 6\,(\mathrm{H}'\cdot\mathrm{K}') + (\mathrm{K}'^2)\,.$$

Sia ora S non minimale; allora esiste un morfismo birazionale $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_0$, ove S_0 è una superficie minimale non rigata. Tenuto conto della (3.14), della (3.16), e del teorema di struttura dei morfismi birazionali (cfr. ad esempio [7], p. 411), risulta allora $6\,(\mathrm{H}\cdot\mathrm{K}) + (\mathrm{K}^2) \geq 0$ per ogni $\mathrm{H} \in \mathrm{Div}\,(\mathrm{S})$ ampio. Ne consegue $(\Gamma^2) > 0$.

4. – Sia ora $\Phi : \mathrm{S} \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ il piano multiplo associato ad una rete R, sia $\mathrm{H} \in \mathrm{R} - \Theta$ il divisore della parte mobile, sia Γ la jacobiana della rete $\mathrm{R} - \Theta$. Si supporrà che siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

a) $\Phi : \mathrm{S} \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ *è un piano multiplo generale*,

b) H *è ampio*.

Sotto tali ipotesi si proverà il teorema fondamentale sull'isomorfismo di due piani multipli con la stessa curva di diramazione.

Sia U_Γ un intorno tubolare di Γ in S e si ponga $\mathrm{X} = \mathrm{S} \setminus \Gamma, \mathrm{U} = \mathrm{U}_\Gamma \setminus \Gamma$. Sussistono i seguenti lemmi.

LEMMA 4.1. – X *è una superficie di Stein.*

Dimostrazione. – Nelle ipotesi *a*) e *b*), dal Teorema 3.1 si trae che il divisore Γ è ampio. Allora, per un certo intero $n > 0$, il sistema lineare $|n\Gamma|$ definisce una immersione chiusa $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathbf{P}^{\mathrm{N}}$ $(\mathrm{N} = \dim |n\Gamma|)$, e si ha $\mathrm{Supp}\,\Gamma = \mathrm{Supp}\,n\Gamma = \mathrm{S} \cap \mathrm{I}$, I essendo un opportuno iperpiano di $\mathbf{P}^{\mathrm{N}}$. Dunque $\mathrm{X} = \mathrm{S} \setminus \Gamma$ è affine, e, pertanto, di Stein (cfr. ad esempio [8], p. 232).

LEMMA 4.2. – *La restrizione* $\rho_{\mathrm{U}} : \mathrm{H}^0(\mathrm{X}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{U}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{U}})$ *è un isomorfismo.*

Dimostrazione. – In base al lemma 4.1, X è di Stein, ed ammette, perciò, una successione esaustiva di compatti $\{\mathrm{K}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ olomorficamente convessi. Poiché U_Γ è un intorno tubolare di Γ, per un intero n opportunamente grande, risulta

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{X} \setminus \mathrm{K}_n \subset \mathrm{U}\,.$$

Si consideri la successione esatta di coomologia definita da K_n (cfr. ad esempio [1], p. 9)

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{K}_n}(\mathrm{X}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_n\,,\mathcal{O}_{\mathrm{U}_n}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{K}_n}(\mathrm{X}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \cdots.$$

È, banalmente, $\mathrm{H}^0_{\mathrm{K}_n}(\mathrm{X}\,,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) = 0$; inoltre, poiché X è di Stein e K_n è un compatto olomorficamente convesso, si ha (cfr. [1], Th. 3.1, p. 37)

$H^1_{K_n}(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Pertanto, la restrizione $\rho_{U_n}: H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(U_n, \mathcal{O}_{U_n})$ risulta essere un isomorfismo. Si consideri il diagramma di restrizioni

$$\begin{tikzcd} H^0(X, \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "\rho_{U_n}"'] \arrow[dr, "\rho_U"'] & & H^0(U_n, \mathcal{O}_{U_n}) \\ & H^0(U, \mathcal{O}_U) \arrow[ur, "\rho_n"'] & \end{tikzcd}$$

indotto dalla catena di inclusioni $U_n \subset U \subset X$. Tutti i morfismi che in esso figurano, in quanto restrizioni di funzioni olomorfe, sono iniettivi; inoltre, dalla suriettività di ρ_{U_n} segue quella di ρ_n. Ne discende che ρ_U è un isomorfismo.

È ora possibile provare il

TEOREMA 4.1. *Siano* $\Phi: S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ *e* $\Phi': S' \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ *due piani multipli che soddisfano le ipotesi a) e b) ed hanno la stessa curva di diramazione. Allora esiste un isomorfismo* $F: S \to S'$ *che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, dashed, "\Phi"'] & & S' \arrow[dl, dashed, "\Phi'"] \\ & \mathbf{P}^2 & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Dimostrazione. – Siano Γ e Γ' le jacobiane delle reti $R - \Theta$, $R' - \Theta'$ corrispondenti a Φ e Φ' e sia Δ la curva di diramazione. Valendo l'ipotesi *a*), in base al Teorema 2.1, esistono intorni tubolari $U_\Gamma, U'_{\Gamma'}$, di Γ e Γ' rispettivamente, un intorno V di Δ ed un isomorfismo $h: U_\Gamma \to U'_{\Gamma'}$ che rende commutativo il diagramma (2.2). Valendo anche l'ipotesi *b*), dal Lemma 4.1 si ha che le superfici $X = S \setminus \Gamma$ ed $X' = S' \setminus \Gamma'$ sono di Stein. Posto $U = U_\Gamma \setminus \Gamma$, $U' = U'_{\Gamma'} \setminus \Gamma'$, si consideri il diagramma

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\rho} H^0(U, \mathcal{O}_U) \xleftarrow{f^*} H^0(U', \mathcal{O}_{U'}) \xleftarrow{\rho'} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}),$$

ove ρ e ρ' denotano le restrizioni ed f^* è l'isomorfismo indotto da $f = h_{|U}$. In forza del Lemma 4.2 si ha allora che pure

$$\rho^{-1} \circ f^* \circ \rho': H^0(X', \mathcal{O}_{X'}) \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$$

è un isomorfismo. Per un noto risultato di Remmert ne consegue che le superfici di Stein X ed X' sono isomorfe. Sia $\tilde{f}: X \to X'$ l'isomorfismo che estende f. Per la commutatività del diagramma (2.2) ed in forza del teorema di identità, si ha $\Phi' \circ \tilde{f} = \Phi_{|X}$. L'applicazione $F: S \to S'$ definita ponendo

$$F(p) = \begin{cases} h(p) & \text{se } p \in U, \\ \tilde{f}(p) & \text{se } p \in X, \end{cases}$$

è allora un isomorfismo e rende commutativo il diagramma (4.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BANICA and O. STANASILA (1976) – *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*. Wiley,

[2] O. CHISINI (1939–40) – *Sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di un punto cuspidale della curva di diramazione*. « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *73*, 428–434.

[3] O. CHISINI (1943–44) – *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*. « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *77*, 339–356.

[4] O. CHISINI (1947) – *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di più variabili dotate di una medesima varietà di diramazione*. « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *80*, 3–6.

[5] F. ENRIQUES (1923) – *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*. « Ann. di Mat. », s. IV, *1*, 185–198.

[6] F. ENRIQUES (1934) – *Sulla classificazione delle superfici algebriche particolarmente di genere zero*. « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma ».

[7] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry*. G. T. M., 52. Springer.

[8] R. HARTSHORNE (1970) – *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*. Lecture Notes in Math., 156. Springer.

[9] J. G. SEMPLE and L. ROTH (1949) – *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford Univ. Press.

[10] O. ZARISKI (1971) – *Algebraic Surfaces*. Springer.