Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

Alcune osservazioni sulle classi di Fitting di gruppi localmente finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.6, p. 498–501.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_6_498_0>

Algebra. — *Alcune osservazioni sulle classi di Fitting di gruppi localmente finiti* (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We extend some results on Fitting classes of finite soluble groups to certain classes of infinite groups.

Nella presente Nota, con classe di gruppi si intende una classe chiusa per isomorfismi. Se $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{F}$ sono classi di gruppi con $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}$, $\mathcal{F}$ è detta una classe di Fitting di $\mathfrak{X}$–gruppi se

(i) Se $G \in \mathcal{F}$ e H è un sottogruppo seriale di G (cfr. [3]), allora $H \in \mathfrak{X}$

(ii) Se $G \in \mathfrak{X}$ ed è generato da un insieme di sottogruppi seriali appartenenti and $\mathcal{F}$, allora $G \in \mathcal{F}$.

Se G è un gruppo, un insieme Σ di sottogruppi di G è detto un sistema locale di G (cfr. [6]) se

(i) $G = \bigcup_{H \in \Sigma} H$

(ii) se $H \in \Sigma$ e $K \in \Sigma$, esiste $T \in \Sigma$ con $\langle H, K \rangle \subseteq T$.

Se G è un gruppo e $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, con $G^{\mathfrak{X}}$ intendiamo l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G a quoziente in $\mathfrak{X}$ (l'$\mathfrak{X}$–residuo di G) e con $G_{\mathfrak{X}}$ il sottogruppo generato dai sottogruppi normali di G, appartenenti ad $\mathfrak{X}$ (l'$\mathfrak{X}$–radicale di G).

A. A. Klimowicz ([4]) chiama $\mathcal{B}$–gruppo un gruppo G, dotato di un sistema locale Σ costituito da gruppi finiti risolubili, tale che il residuo $G^{L\mathcal{N}}$ di G rispetto alla classe $L\mathcal{N}$ dei gruppi localmente nilpotenti, sia contenuto in $N_G(\Sigma) = \bigcap_{H \in \Sigma} N_G(H)$.

In [5] esso estende a classi di $\mathcal{B}$–gruppi i risultati di B. Fischer, W. Gaschütz e B. Hartley ([2]), di D. Blessenohl e W. Gaschütz ([1]) e H. Lausch ([6]) sulle classi di Fitting di gruppi finiti risolubili.

In questa breve Nota si estendono a certe classi di $\mathcal{B}$–gruppi, la costruzione di Zappa ([9]) e un risultato dell'Autore ([8]).

DEFINIZIONE 1. *Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi,* A *un gruppo e d una legge che associ ad ogni gruppo* $G \in \mathfrak{X}$ *un insieme* d_G *di omomorfismi di* G *in* A, *in modo tale che*:

(i) *Se* φ *è un isomorfismo dell'$\mathfrak{X}$–gruppo* G *sull'$\mathfrak{X}$–gruppo* $\overline{G}$ *si abbia* $d_G = \varphi d_{\overline{G}}$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA del CNR.
(**) Nella seduta del 14 giugno 1979.

(ii) *Se* $f, h \in d_G$ $(G \in \mathcal{X})$ *si abbia* $Gf \simeq Gh$

(iii) *Se* $f \in d_G$ $(G \in \mathcal{X})$ *e* H *è un sottogruppo seriale di* G, *allora* $f_{|H} \in d_H$

(iv) $A = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{X} \\ f \in d_G}} Gf.$

La coppia (A, d) *è detta una coppia di Fitting su* $\mathcal{X}$ *ed è detta normale* (cfr. [7]) *se* A *è abeliano e* $|d_G| = 1$ *per ogni* $G \in \mathcal{X}$.

THEOREMA 1. (cfr. [9]). *Sia* (A, d) *una coppia di Fitting su* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A, d) = \{G \in \mathcal{X} \mid Gf = \langle 1 \rangle$ *per ogni* $f \in d_G\}$; *allora* $\mathcal{F}$ *è una classe di Fitting su* $\mathcal{X}$.

Dimostrazione. Sia $G \in \mathcal{F}$, $f \in d_G$ e H un sottogruppo seriale di G. Per la condizione (iii), $f_{|H} \in d_H$ ed essendo $Hf = \langle 1 \rangle$, si ha, per la condizione (ii), che $Hm = \langle 1 \rangle$ per ogni $m \in d_H$.

Perciò $H \in \mathcal{F}$. Sia poi $G \in \mathcal{X}$ e $G = \langle S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda$, S_λ sottogruppo seriale di G e $S_\lambda \in \mathcal{F}$, per ogni $\lambda \in \Lambda\rangle$. Sia $f \in d_G$; per la condizione (iii) $f_{|S_\lambda} \in d_{S_\lambda}$, per ogni $\lambda \in \Lambda$ e quindi $S_\lambda f = \langle 1 \rangle$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Sia $g \in G$; sarà $g = s_1 s_2, \cdots, s_n$ con $s_i \in S_{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \Lambda$ $(i = 1, \cdots, n)$ e quindi $gf = (s_1 f) \cdots \cdots (s_n f) = 1$. Ne segue che $Gf = \langle 1 \rangle$ per ogni $f \in d_G$ e dunque $G \in \mathcal{F}$. Perciò $\mathcal{F}$ è una classe di Fitting di $\mathcal{X}$-gruppi.

DEFINIZIONE 2. *Sia* A *un gruppo,* $\mathcal{X}$ *una classe di gruppi e* $\mathcal{F}$ *una classe di Fitting di* $\mathcal{X}$*-gruppi; diremo che* A *rappresenta* $\mathcal{F}$ *se esiste una coppia di Fitting* (H, d) *su* $\mathcal{X}$ *tale che* $A \simeq H$ *e* $\mathcal{F}(H, d) = \mathcal{F}$.

THEOREMA 2. *Sia* U *il gruppo numerabile universale* (cfr. [3]), $\mathcal{X}$ *la classe dei* $\mathcal{B}$*-gruppi contabili e* $\mathcal{F}$ *una classe di Fitting non normale di* $\mathcal{X}$*-gruppi; allora* U *rappresenta* $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Sia H un gruppo finito risolubile e π_H l'omomorfismo naturale di H su $H/H_{\mathcal{F}}$. Sia i_H una immersione di $H/H_{\mathcal{F}}$ in U. Si avrà allora che $f_H = \pi_H i_H$ è un omomorfismo di H in U, il cui nucleo è $H_{\mathcal{F}}$. Poniamo $d_H = \{f_H \varphi_u \mid u \in U\}$ ove φ_u è l'automorfismo interno indotto da u in U. Sia ora G un $\mathcal{B}$-gruppo contabile e Σ un sistema locale di G, soddisfacente le condizioni di cui alla definizione di $\mathcal{B}$-gruppo. Essendo G contabile, si può estrarre da Σ una catena ascendente $\Sigma_1 = \{H_i \mid i \in \mathbf{N}\}$, che è ancora un sistema locale di G. Sia $f_1 \in d_{H_1}$; essendo H_1 seriale si ha $H_1 H_{2\mathcal{F}}/H_{2\mathcal{F}} \simeq H_1/H_{1\mathcal{F}}$, cosicchè, per le proprietà del gruppo U, si può estendere i_{H_1} ad una immersione i_{H_2} di $H_2/H_{2\mathcal{F}}$ in U. Giacchè in U, sottogruppi isomorfi sono coniugati, $f_2 = \pi_{H_2} i_{H_2} \in d_{H_2}$. Per induzione si può trovare una successione $\{f_i \mid f_i : H_i \to U\}$ di omomorfismi con f_i di nucleo $H_{i\mathcal{F}}$ e $f_{i|H_j} = f_j$ per ogni $j \leq i$. Tale successione definisce un omomorfismo f di G in U, il cui nucleo è $G_{\mathcal{F}}$. Porremo allora $d_G = \{f\varphi_u \mid u \in U\}$. In base a [1], essendo $\mathcal{F}$ non normale, per ogni gruppo finito risolubile H esiste un gruppo risolubile finito K con $H \subseteq K/K_{\mathcal{F}}$ e quindi $U = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{X} \\ f \in d_G}} Gf$. Ne segue che (U, d) è una coppia di Fitting su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}(U, d)$.

TEOREMA 3. *Sia* H *la minima classe di Fitting normale di* $\mathscr{B}$*-gruppi* (cfr. [5]), *allora* U *rappresenta* H.

Dimostrazione. In base a [8], per ogni gruppo abeliano finito H esiste un gruppo risolubile finito K, tale che $K/K_{\mathscr{H}} \simeq H$.

Il gruppo di Lausch (cfr. [7]), che, in base a [5, Lemma 3.8 e Theorema 3.9], rappresenta $\mathscr{H}$, è numerabile e quindi per ogni $G \in \mathscr{B}$ e per ogni Σ sistema locale di G, dall'insieme $\{HG_{\mathscr{H}}/G_{\mathscr{H}} \mid H \in \Sigma\}$ si può estrarre una catena $\bar{H}_1 \subsetneq \bar{H}_2 \subset \cdots \subset \bar{H}_n \subset \cdots$ con $\bigcup_n \bar{H}_n = G$. Si possono allora ripetere i ragionamenti svolti nel corso della dimostrazione del Teorema 2, ottenendo una rappresentazione di $\mathscr{H}$ su U. $\bigcup_{\substack{G \in \mathscr{B} \\ f \in d_G}} Gf$ costituisce una copertura di U di gruppi finiti abeliani.

TEOREMA 4. *Sia* A *un gruppo abeliano contabile e periodico della forma* $A = D \times A_0$ *con* D *divisibile e* A_0 *ridotto; sia inoltre* A_0 *prodotto diretto di gruppi ciclici primari. Esiste allora un* $\mathscr{B}$*-gruppo contabile* G, *tale che*:

(i) $G_{\mathscr{H}}$ *è abeliano*

(ii) $G/G_{\mathscr{H}} \simeq A$.

Dimostrazione. Se A è finito cfr. [8]. Sia A non finito e $A = \times_{i \in \mathbf{N}} C_i$ con C_i di Prüfer o ciclico primario. Sia p_i la caratteristica di C_i. In base al Teorema di Dirichlet, per ogni numero naturale n, esistono infiniti numeri primi q tali che $n \mid q - 1$ e quindi, ad ogni C_i si può associare un numero primo q_i in modo tale che

(i) se C_i è di Prüfer, $p_i \mid q_i - 1$;

(ii) se C_i è ciclico d'ordine $p_i^{h_i}$, $p_i^{h_i} \mid q_i - 1$;

(iii) se $i \neq j$ è $q_i \neq q_j$.

Se C_i è ciclico, sia Ω_i l'olomorfo di Z_{q_i} (il gruppo ciclico d'ordine q_i) tramite C_i. Se C_i è di Prüfer, procediamo nel seguente modo: sia $p_i^{h_0}$ la massima potenza di p_i che divida $q_i - 1$ e sia $\Omega_i^{(0)}$ l'olomorfo di Z_{q_i} tramite $Z_{p_i^{h_0}}$. Poniamo $K_0 = GF(q_i)$. Sia $f_1(x) = x^{p_i^{h_0+1}} - 1$ e sia K_1 il campo di riducibilità completa di $f_1(x) \in GF(q_i)[x]$. Sia h_1 il massimo numero naturale tale che $x^{p_i^{h_1}} - 1$ si spezza in fattori lineari su K_1 e sia ξ_1 un elemento di periodo $p_i^{h_1}$ in K_1^* (il gruppo moltiplicativo di K_1). ξ_1 induce (per moltiplicazione) una trasformazione lineare del gruppo additivo di K_1. Chiameremo $\Omega_i^{(1)}$ l'olomorfo del gruppo additivo di K_1 tramite il gruppo generato da tale trasformazione lineare.

È chiaro che $\Omega_i^{(0)} \subseteq \Omega_i^{(1)}$ e, per induzione, si riesce a definire una successione $\Omega_i^{(j)}$ di gruppi ciascuno contenuto nel successivo e tale che $\Omega_i^{(j)}/\Omega_{i\mathscr{H}}^{(j)} \simeq Z_{p_i^{h_j}}$. L'unione Ω_i di tali gruppi è tale che $\Omega_i/\Omega_{i\mathscr{H}} \simeq C_i$. Poniamo $\Omega = \times_{i \in \mathbf{N}} \Omega_i$. Ω è il $\mathscr{B}$-gruppo contabile richiesto.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. BLESSENOHL, W. GASCHÜTZ (1970) – *Über normale Schunk-und Fittingklassen*, «Math. Z.», *118*, 1–8.
[2] B. FISCHER, W. GASCHUTZ e B. HARTLEY (1967) – *Injektoren der endlichen auflösbaren Gruppen*, «Math. Z.», *102*, 337–339.
[3] O. H. KEGEL e B. A. F. WEHRFRITZ (1973) – *Locally Finite Groups*, «North Holland Publ. Comp.», Amsterdam.
[4] A. A. KLIMOWICZ (1976) – *Sylow structure and basis normalizers in a class of locally finite groups*, « Journ. London Math. Soc.», *13*, 69–79.
[5] A. A. KLIMOWICZ (1976) – *Fitting Theory in a Class of Locally Finite Groups*, « Journ. of Algebra», *39*, 249–254.
[6] A. G. KUROSCH (1956) – *The theory of groups*. «Chelsea Publ. Comp.», New York.
[7] H. LAUSCH (1973) – *On normal Fitting classes*, «Math. Z.», *130*, 67–72.
[8] A. SCARSELLI (1975) – *Una osservazione sulla classe di Fitting normale minima*, « Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), *58*, 499–500.
[9] G. ZAPPA (1977) – *Sulla costruzione di classi di Fitting*, « Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), *62*, 725–727.