Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andre Batbedat

Le Spectre plein d'un ensemble ordonné

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.6, p. 494–497.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_6_494_0>

Algebra. — *Le Spectre plein d'un ensemble ordonné.* Nota di ANDRE BATBEDAT, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si costruisce il funtore Spettro pieno, dagli insiemi ordinati ad una notevole categoria di spazi topologici (chiamati monogenerati). Si stabilisce poi una dualità per i semireticoli.

INTRODUCTION

On connaît le foncteur spectre [1] de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires vers la catégorie TOP des espaces topologiques et son image: espaces spectraux de Hochster [5] et applications spectrales.

Nous effectuons ici une démarche analogue à partir des ensembles ordonnés achevés; d'où le foncteur spectre plein.

Ceci met en valeur une sous-catégorie T de TOP: ses objets sont appelés ici espaces monogénérés car ils possèdent une interbase d'ouverts monogènes.

Le principal résultat est la dualité qui en résulte entre T et la catégorie des infreillis achevés. Cette dualité est différente de celle de [7] où les espaces sont séparés. Cependant à partir de T on obtient facilement les espaces de [7] par la topologie constructible (encore appelée patch-topologie); d'où un lien canonique avec toutes les applications présentées dans [7].

I. LES ESPACES MONOGENERES

I.1. Soit X un espace topologique: on dit que l'ouvert α est *monogène* s'il existe un point x (un *générateur de* α) pour lequel α est le plus petit ouvert contenant x. Selon les circonstances, on peut aussi convenir que l'ouvert vide est monogène. On voit que:

PROPOSITION 1. *Soit* α *un ouvert non vide de* X. *Sont équivalents*:

i) α *est monogéne*;

ii) *Pour tout recouvrement de* α *par une famille d'ouverts* β_i *il existe un des* β_i *qui contient* α;

iii) *La réunion des ouverts strictement contenus dans* α *est distincte de* α.

La propriété ii) est plus forte que quasi-compact. La propriété iii) montre que les ouverts monogènes propres font partie de toute base.

(*) Nella seduta del 14 giugno 1979.

On note $\mathfrak{m}(X)$ l'ensemble des ouverts monogènes de X, vide compris; * en indice supérieur signifie l'exclusion du vide.

Lorsque X est de Kolmogoroff, chaque élément de $\mathfrak{m}^*(X)$ a un unique générateur.

I.2. On appelle ici *espace monogénéré* un espace topologique X pour lequel $\mathfrak{m}(X)$ est une interbase.

Pour de tels espaces X′ et X, l'application θ de X′ vers X est *monocontinue* si l'image réciproque par θ de tout élément de $\mathfrak{m}(X)$ est dans $\mathfrak{m}(X')$.

Ceci détermine la catégorie EMO des espaces monogénérés.

I.3. On note EKMOSS la sous-catégorie pleine de EMO des objets X vérifiant:

E1 : X est de Kolmogoroff;

E2 : X est un ouvert monogène;

E3 : X est sobre (tout fermé irréductible est à point générique).

L'objet le plus élémentaire non trivial dans EKMOSS est $\{0, 1\}$ Sierpinski.

II. LE FONCTEUR SPECPL

II.1. On note ORD la catégorie des ensembles ordonnés achevés (avec 0 et 1) avec pour flèches les applications qui respectent l'inf éventuel pour chaque paire d'éléments.

II.2. Soit H un objet de ORD.

Une partie t de H est permise si $t = \downarrow t$.

Une partie t est *saturée* si $t = \uparrow t$ et contient l'inf éventuel pour chaque paire de ses éléments.

Les parties *premières* sont les complémentaires des saturées. Soit t une partie quelconque: l'intersection des parties premières contenant t est $\downarrow t$; en effet si $a \notin \downarrow t$, $\uparrow a$ est saturée et ne rencontre pas t.

II.3. On note Y l'ensemble des parties premières propres de H. A chaque partie finie s non vide de H on associe l'ensemble $B(s)$ des y de Y qui ne rencontrent pas s; $\mathscr{B}$ est l'ensemble de ces $B(s)$ ordonné par inclusion.

Le spectre plein de H, noté Specpl (H) est l'espace Y pour la topologie engendrée par $\mathscr{B}$.

PROPOSITION. *Specpl* (H) *est un objet de EKMOSS* (1.3). *Ses ouverts monogènes sont les éléments de* $\mathscr{B}$.

II.4. Soit φ une flèche de ORD de H vers H′. Pour chaque partie première y' de H′, $\varphi^{-1}(y')$ est première dans H; d'où l'application Specpl (φ) de Specpl (H′) vers Specpl (H): elle est clairement monocontinue.

PROPOSITION. *Specpl est un foncteur contravariant de ORD vers EKMOSS.*

III. La dualite pour IT

III.1. On note IT la catégorie des inftreillis. achevés, sous–catégorie pleine de ORD (II.1).

Soit H un objet de IT: l'inf de a et b est encore noté ab. Une partie t de H est saturée ssi $ab \in t$ est équivalent à $a \in t$ et $b \in t$. Une partie première y rencontre la partie finie s ssi y contient inf (s).

III.2. On définit le foncteur contravariant $\mathscr{D}$ de EKMOSS ver IT.

A l'objet X, $\mathscr{D}$ associe $\mathfrak{m}$ (X) (I.1). Pour la flèche θ, $\mathscr{D}(\theta)$ est θ^{-1} de $\mathscr{D}$ (X) bers $\mathscr{D}$ (X').

III.3.

Theoreme. *Les catégories IT et EKMOSS sont duales.*

Preuve. On va montrer que $\mathscr{D}$ est réciproque de la restriction $\mathscr{T}$ de Specpl à IT. $\mathscr{D}\mathscr{T}$ (H) est $\mathscr{B}$ (II.3) que l'on identifie à H par l'isomorphisme: $a \in \mathrm{H} \to \mathrm{B}(a) \in \mathscr{B}$; alors $\mathscr{D}\mathscr{T}(\varphi)$ s'identifie à φ car l'image réciproque de $\mathrm{B}(a)$ par $\mathscr{T}(\varphi)$ est $\mathrm{B}(\varphi(a))$. Avant d'étudier $\mathscr{T}\mathscr{D}$, introduisons l'homéomorphisme $\sim$ entre X objet de EKMOSS et $\mathscr{T}(\mathfrak{m})$ pour $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathrm{X})$: pour chaque $x \in \mathrm{X}$, l'ensemble $\tilde{x}$ des ouverts monogènes ne contenant pas x est une partie premières de $\mathfrak{m}$; $\sim$ est injective car X est de Kolmogoroff; montrons que $\sim$ est surjective: soit u une partie première de $\mathfrak{m}$, ε la réunion des α de u et ε' le complémentaire de ε dans X ; u est l'ensemble de tous les ouverts monogènes contenus dans ε car le générateur de chacun d'eux est contenu dans un α de u donc ε' n'est pas vide, est irréductible et par conséquent c'est la fermeture d'un certain x: alors $u = \tilde{x}$; enfin $\sim$ est continue et ouverte car l'image de l'ouvert monogène α est $\mathrm{B}(\alpha)$ dans $\mathscr{T}(\mathfrak{m})$. Ceci étant, on identifie X et $\mathscr{T}\mathscr{D}$ (X) par $\sim$; alors θ s'identifie à $\mathscr{T}\mathscr{D}(\theta)$ car l'image réciproque de $\tilde{x}'$ par $\mathscr{D}(\theta)$ est $\tilde{x}$.

IV. D'Autres espaces

IV.1. L'exercise I § 1.2 de [2] présente la topologie droite pour un ensemble ordonné. Ce lien entre ORD et TOP est aussi étudié dans [4].

On obtient des espaces de Kolmogoroff dans lesquels tout point est générateur d'un ouvert monogène.

IV.2. Soit H un objet de ORD: Specmin (H) est le sous–espace de Specpl (H) des parties premières minimales. On peut facilement se ramener au cas où H est dans IT; alors on sait par le théorème 3.2 de [8] que cet espace est séparé et posséde une base d'ofs.

IV.3. Lorsque H est un treillis distributif Spec (H) est le sous-espace de Specpl (H) des idéaux premiers de H. Sur ce point, voir [3] ou [6].

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI – Fascicule XXVII, algèbre commutative, chapitre 2, localisation, Hermann (Paris).

[2] N. BOURBAKI – *Topologie générale*, chapitres 1 à 4, Hermann (Paris).

[3] A. BREZULEANU et R. DIACONESCU (1969) – *Sur la duale de la catégorie des treillis*. « Rev. Roum. Math. pures et appliquées », XIV, *3*, 311–323.

[4] G. GEORGESCU et B. LUNGULESCU (1969) – *Sur les propriétés topologiques des structures ordonnées*. « Rev. Roum. Math. pures et appliquées », XIV, *10*.

[5] M. HOCHSTER (1969) – *Prime ideal structure in communtative rings*. « Trans. Amer. Math. Soc. », *142*, 43–60.

[6] K. H. HOFMANN et K. KEIMEL (1972) – *A general caracter theory for partially ordered sets and lattices*. « Memoirs Amer. Math. Soc. ».

[7] K. H. HOFMANN, M. MISLOVE and A. STRALKA (1974) – *The Pontryagin duality of compact O-dimensional semilattices and its applications*. Lecture Notes in « Mathematics », Springer Verlag, 396.

[8] J. KIST (1963) – *Minimal prime ideals in commutative semigroups*. « Proc. London Math. Soc. », *3*, 13.