Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Maceri, Raffaele Toscano, Aldo Maceri

Alcuni problemi di vincolo unilaterale per sistemi di travi linearmente elastici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.5, p. 389–395.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_389_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Meccanica. — *Alcuni problemi di vincolo unilaterale per sistemi di travi linearmente elastici.* Nota II di FRANCO MACERI (*), RAFFAELE TOSCANO (**) e ALDO MACERI (***), presentata (****) dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — An unilateral constraint problem for linear systems of elastic beams is analyzed in this paper. Conditions of existence, uniqueness and continuity of the solution are given. Practical computation algorithms are also included.

1. In questo lavoro proseguiamo lo studio, iniziato nella Nota I, delle strutture monodimensionali in regime linearmente elastico, agli spostamenti delle quali siano imposte limitazioni unilaterali in corrispondenza di un numero finito di punti.

Più precisamente, dato il sistema di equazioni di equilibrio:

$$\mathrm{A}u = f$$

che risolve, con il metodo degli spostamenti, la struttura assegnata (la matrice reale e simmetrica A si suppone definita positiva, il che assicura l'esistenza e l'unicità delle componenti generalizzate di spostamento nodali u quali che siano i carichi f), studiamo nel paragrafo 2 gli effetti di ostacoli (o vincoli) unilaterali elastici imposti in corrispondenza di alcune delle componenti u, stabilendo i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati per la soluzione del problema; analizziamo inoltre la questione, di rilevante interesse tecnico, della struttura soggetta a carico dipendente linearmente da un parametro, discutendo poi un algoritmo di calcolo.

Il paragrafo 3 è dedicato infine allo studio di una ulteriore proprietà di continuità.

2. In questo paragrafo conserviamo le notazioni introdotte nella Nota I, ponendo inoltre:

$$\mathrm{M}'_n = \{\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n \mid a_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j \quad \text{e per} \quad i = j \notin \mathrm{E}_2 ,$$
$$a_{ii} > 0 \quad \text{per} \quad i \in \mathrm{E}_2\}$$

(*) Dipartimento di Strutture dell'Università della Calabria.
(**) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(***) Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(****) Nella seduta del 21 aprile 1979.

$$M_n'' = \{A = (a_{ij}) \in M_n \mid a_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j \quad \text{e per} \quad i = j \notin E_3 ,$$
$$a_{ii} > 0 \quad \text{per} \quad i \in E_3\}$$

e studiamo il:

Problema (Q) - Dati: $A \in M_n^+$, $K \in M_n'$, $H \in M_n''$, $h \in M_n''$, $f \in R^n$, $s \in R_3^n$, $S \in R_3^n$, $\Sigma \in R_2^n$, trovare $u \in R^n$ tale che:

$$Au + K(I_2 u - \Sigma)^+ + H(I_3 u - S)^+ - h(s - I_3 u)^+ = f .$$

Anzitutto, osserviamo che il funzionale:

$$\Phi(v) = \tfrac{1}{2} [(I_2 v - \Sigma)^+]^T K (I_2 v - \Sigma) + \tfrac{1}{2} [(I_3 v - S)^+]^T H (I_3 v - S) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [(s - I_3 v)^+]^T h (s - I_3 v) \qquad \forall v \in R^n$$

è convesso, di classe C^1 e risulta:

$$\Phi'(u, v) = v^T [K(I_2 u - \Sigma)^+ + H(I_3 u - S)^+ - h(s - I_3 u)^+] \tag{1}$$
$$\forall (u, v) \in R^n \times R^n .$$

TEOREMA 1. *Qualunque sia* $u \in R^n$, *le proposizioni seguenti sono equivalenti*:

1) *u è soluzione del problema* (Q).

2) *u è soluzione della disequazione variazionale di tipo misto:*

$$u \in R^n : (v - u)^T (Au - f) + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0 \qquad \forall v \in R^n . \tag{2}$$

3) *u minimizza in* R^n *il funzionale*:

$$v \in R^n \to \tfrac{1}{2} v^T A v + \Phi(v) - v^T f .$$

Dimostrazione 1) ⇒ 2). Infatti, per ogni $v \in R^n$:

$$0 = (v - u)^T (Au - f) + (I_2 v - \Sigma)^T K (I_2 u - \Sigma)^+ - (I_2 u - \Sigma)^T K \cdot$$
$$\cdot (I_2 u - \Sigma)^+ + (I_3 v - S)^T H (I_3 u - S)^+ - (I_3 u - S)^T H (I_3 u - S)^+ +$$
$$+ (s - I_3 v)^T h (s - I_3 u)^+ - (s - I_3 u)^T h (s - I_3 u)^+ \leq (v - u)^T \cdot$$
$$\cdot (Au - f) - [(I_2 u - \Sigma)^+]^T K (I_2 u - \Sigma)^+ + \tfrac{1}{2} \{[(I_2 v - \Sigma)^+]^T K \cdot$$
$$\cdot (I_2 v - \Sigma)^+ + [(I_2 u - \Sigma)^+]^T K (I_2 u - \Sigma)^+\} - [(I_3 u - S)^+]^T H \cdot$$
$$\cdot (I_3 u - S)^+ + \tfrac{1}{2} \{[(I_3 v - S)^+]^T H (I_3 v - S)^+ + [(I_3 u - S)^+]^T H \cdot$$
$$\cdot (I_3 u - S)^+ - [(s - I_3 u)^+]^T h (s - I_3 u)^+ + \tfrac{1}{2} \{[(s - I_3 v)^+]^T h \cdot$$
$$\cdot (s - I_3 v)^+ + [(s - I_3 u)^+]^T h (s - I_3 u)^+\} .$$

2) $\Rightarrow$ 3). Basta osservare che, $\forall v \in \mathrm{R}^n$,

$$(v-u)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}u-f)+\Phi(v)-\Phi(u)\geq 0 \quad \text{e}$$
$$(v-u)^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u \leq \tfrac{1}{2}(v-u)^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(v+u)=\tfrac{1}{2}(v^{\mathrm{T}}\mathrm{A}v-u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u)\,.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Ovvia se si tiene conto della (1).

TEOREMA 2. *Il problema* (Q) *ammette soluzione unica.*

Dimostrazione. Poiché il problema (Q) equivale alla disequazione variazionale (2) e:

$$\lim_{\|v\|_{\mathrm{R}^n}\to+\infty}\frac{v^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}v-f)+\Phi(v)}{\|v\|_{\mathrm{R}^n}}=+\infty\,,$$

un noto teorema di Browder [1] prova l'esistenza della soluzione. L'unicità consegue dal fatto che A è definita positiva.

Osservazione. Il problema (Q), che è evidentemente equivalente all'equazione variazionale:

$$u\in\mathrm{R}^n: v^{\mathrm{T}}[\mathrm{A}u+\mathrm{K}(\mathrm{I}_2u-\Sigma)^+ +\mathrm{H}(\mathrm{I}_3u-\mathrm{S})^+ - h(s-\mathrm{I}_3u)^+ - f]=0 \qquad \forall v\in\mathrm{R}^n\,,$$

risulta, come è facile dimostrare, altresì equivalente al problema di complementarità lineare:

Trovare $(u\,,\mathrm{R}\,,r)\in\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n$ tale che:

$$\begin{cases}\mathrm{A}u-\mathrm{R}+r=f\,, \quad \mathrm{R}\geq 0\,, \quad r\geq 0\,, \quad \mathrm{I}_1\mathrm{R}=0\,,\\ \qquad\qquad \mathrm{I}_1 r=0\,, \quad \mathrm{I}_2\mathrm{R}=0\,,\\ \mathrm{I}_2r-\mathrm{K}(\mathrm{I}_2u-\Sigma)\geq 0\,, \quad \mathrm{I}_3r-\mathrm{H}(\mathrm{I}_3u-\mathrm{S})\geq 0\,,\\ \qquad\qquad \mathrm{I}_3\mathrm{R}-h(s-\mathrm{I}_3u)\geq 0\,,\\ [\mathrm{I}_2r-\mathrm{K}(\mathrm{I}_2u-\Sigma)]^{\mathrm{T}}r+[\mathrm{I}_3r-\mathrm{H}(\mathrm{I}_3u-\mathrm{S})]^{\mathrm{T}}r+\\ \qquad\qquad +[\mathrm{I}_3\mathrm{R}-h(s-\mathrm{I}_3u)]^{\mathrm{T}}\mathrm{R}=0\,.\end{cases}$$

TEOREMA 3. *La soluzione u del problema* (Q) *dipende con continuità dai dati.*

Dimostrazione. Ragionando come per il Teorema 2 di Nota I, basta osservare che, con ovvio significato dei simboli, se:

$$(\mathrm{A}^{(m)},\mathrm{K}^{(m)},\mathrm{H}^{(m)},h^{(m)},f^{(m)},s^{(m)},\mathrm{S}^{(m)},\Sigma^{(m)})\to(\mathrm{A}\,,\mathrm{K}\,,\mathrm{H}\,,h\,,f\,,s\,,\mathrm{S}\,,\Sigma)\,,$$

posto:

$$u_m=u(\mathrm{A}^{(m)},\mathrm{K}^{(m)},\mathrm{H}^{(m)},h^{(m)},f^{(m)},s^{(m)},\mathrm{S}^{(m)},\Sigma^{(m)}) \quad \text{ed} \quad \alpha=\min_{\|v\|_{\mathrm{R}^n}=1} v^{\mathrm{T}}\mathrm{A}v\,,$$

esistono un $\nu \in \mathrm{N}$ ed una successione estratta dalla $\{u_m\}$, che denotiamo con lo stesso simbolo, tali che:

$$\begin{aligned}\forall m > \nu \qquad \alpha/2 \, \| u_m \|^2_{\mathrm{R}^n} \leq u_m^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{(m)} u_m = u_m^{\mathrm{T}} f^{(m)} - u_m^{\mathrm{T}} \mathrm{K}^{(m)} (\mathrm{I}_2 u_m - \Sigma^{(m)})^+ - \\ - u_m^{\mathrm{T}} \mathrm{H}^{(m)} (\mathrm{I}_3 u^{(m)} - \mathrm{S}^{(m)})^+ + u_m^{\mathrm{T}} h^{(m)} (s^{(m)} - \mathrm{I}_3 u^{(m)})^+ \leq \\ \leq u_m^{\mathrm{T}} f^{(m)} - (\Sigma^{(m)})^{\mathrm{T}} \mathrm{K}^{(m)} (\mathrm{I}_2 u_m - \Sigma^{(m)})^+ - \\ - (\mathrm{S}^{(m)})^{\mathrm{T}} \mathrm{H}^{(m)} (\mathrm{I}_3 u^{(m)} - \mathrm{S}^{(m)})^+ + (s^{(m)})^{\mathrm{T}} h^{(m)} (s^{(m)} - \mathrm{I}_3 u_m) .\end{aligned}$$

Se il vettore dei carichi f è del tipo:

$$f = f_0 + \lambda f_1 , \qquad \text{con} \quad f_0 \in \mathrm{R}^n, \, f_1 \in \mathrm{R}^n \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathrm{R} ,$$

denotiamo, $\forall \lambda \in \mathrm{R}$, con $u(\lambda)$ la corrispondente soluzione del problema (Q).

TEOREMA 4. *La funzione* $u(\lambda)$ *è continua e generalmente lineare in* R [(1)].

Dimostrazione. La continuità di $u(\lambda)$ è conseguenza del Teorema 3. Poniamo, per ogni $\lambda \in \mathrm{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_2^{(2,\lambda)} &= \{i \in \mathrm{E}_2 \mid (\mathrm{I}_2 u(\lambda) - \Sigma)_i^+ > 0\} , \\ \mathrm{E}_3^{(2,\lambda)} &= \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (\mathrm{I}_3 u(\lambda) - \mathrm{S})_i^+ > 0\} , \\ \mathrm{E}_3^{(4,\lambda)} &= \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (s - \mathrm{I}_3 u(\lambda)_i^+ > 0\} , \\ \mathrm{J}u(\lambda) &= (\mathrm{E}_2^{(2,\lambda)}, \mathrm{E}_3^{(2,\lambda)}, \mathrm{E}_3^{(4,\lambda)}) . \end{aligned}$$

Per conseguire la tesi, basta (cfr. dim. Teorema 3 di Nota I) provare che:

Se λ' *e* λ'' *sono numeri reali tali che* $\lambda' < \lambda''$ *e* $\mathrm{J}u(\lambda') = \mathrm{J}u(\lambda'')$, *allora:*

$$u(\lambda) = u(\lambda') \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} + u(\lambda'') \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''] \tag{3}$$

$$\mathrm{J}u(\lambda) = \mathrm{J}u(\lambda') \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''] . \tag{4}$$

Posto

$$v(\lambda) = u(\lambda') \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} + u(\lambda'') \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''] ,$$

(1) Nel senso che esiste una partizione finita di R costituita da intervalli:

$$\{\mathrm{B}_1 , \cdots , \mathrm{B}_m\}$$

tale che, $\forall r \in \{1, \cdots, m\}$, le componenti della restrizione di $u(\lambda)$ a B_r sono polinomi al più di primo grado.

la (3) segue in modo ovvio dalle relazioni:

$$\mathrm{I}_1 [\mathrm{A}v(\lambda) + \mathrm{K}(\mathrm{I}_2 v(\lambda) - \Sigma)^+ + \mathrm{H}(\mathrm{I}_3 v(\lambda) - \mathrm{S})^+ - h(s - \mathrm{I}_3 v(\lambda))^+ - f] = 0\,,$$

$$\mathrm{I}_2 [\mathrm{A}v(\lambda) + \mathrm{K}(\mathrm{I}_2 v(\lambda) - \Sigma)^+ + \mathrm{H}(\mathrm{I}_3 v(\lambda) - \mathrm{S})^+ - h(s - \mathrm{I}_3 v(\lambda))^+ - f] = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 [\mathrm{A}v(\lambda) &+ \mathrm{K}(\mathrm{I}_2 v(\lambda) - \Sigma)^+ + \mathrm{H}(\mathrm{I}_3 v(\lambda) - \mathrm{S})^+ - h(s - \mathrm{I}_3 v(\lambda))^+ - f] = \\ &= \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''}\, \mathrm{I}_3 [\mathrm{A}u(\lambda') - (f_0 + \lambda' f_1) + \mathrm{H}(\mathrm{I}_3 u(\lambda') - \mathrm{S})^+ - \\ &- h(s - \mathrm{I}_3 u(\lambda'))^+] + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'}\, \mathrm{I}_3 [\mathrm{A}u(\lambda'') - (f_0 + \lambda'' f_1) + \\ &+ \mathrm{H}(\mathrm{I}_3 u(\lambda'') - \mathrm{S})^+ - h(s - \mathrm{I}_3 u(\lambda''))^+] = 0\,.\end{aligned}$$

La (4) è ovvia.

Prendiamo infine in esame il seguente algoritmo risolutivo per il problema (Q):

$$\begin{aligned}(5)\qquad \sum_{j<i} a_{ij}\, u_j^{(k+1)} &+ a_{ii}\, u_i^{(k+1)} + \sum_{j>i} a_{ij}\, u_j^{(k)} + k_{ii}\,(u_i^{k+1} - \Sigma_i)^+ + \\ &+ \mathrm{H}_{ii}\,(u_i^{k+1} - \mathrm{S}_i)^+ - h_{ii}\,(s_i - u_i^{k+1})^+ - f_i = 0\ ^{(2)}.\end{aligned}$$

TEOREMA 5. *La successione $\{u^k\}$ converge verso la soluzione del problema* (Q).

Dimostrazione. Basta [3] osservare che il funzionale:

$$\mathrm{G}(v) = \tfrac{1}{2}\, v^{\mathrm{T}} \mathrm{A} v - v^{\mathrm{T}} f + \Phi(v) \qquad \forall v \in \mathrm{R}^n$$

è di classe C^1, strettamente convesso e risulta:

$$\mathrm{G}(v) \to +\infty \qquad \text{per} \quad \|v\|_{\mathrm{R}^n} \to +\infty\,.$$

3. Fissati $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n^+$, $f \in \mathrm{R}^n$, $\Sigma \in \mathrm{R}_2^n$, $s \in \mathrm{R}_3^n$ ed $\mathrm{S} \in \mathrm{R}_3^n$, con $s \leq \mathrm{S}$, indichiamo con u la soluzione del problema (P) di Nota I e, per ogni $(\mathrm{K}, \mathrm{H}, h) \in \mathrm{M}_n' \times (\mathrm{M}_n'')^2$, con $u(\mathrm{K}, \mathrm{H}, h)$ la soluzione del problema (Q).

TEOREMA 6. *Risulta*:

$$u(\mathrm{K}, \mathrm{H}, h) \to u \ \textit{in}\ \mathrm{R}^n\ \textit{per}\ \inf_{i \in \mathrm{E}_2} \mathrm{K}_{ii} \to +\infty\,,\ \inf_{i \in \mathrm{E}_3} \mathrm{H}_{ii} \to +\infty\,,\ \inf_{i \in \mathrm{E}_3} h_{ii} \to +\infty\,.$$

(2) L'equazione (5) è non lineare nell'unica incognita u_i^{k+1} se $i \in \mathrm{E}_2 \cup \mathrm{E}_3$; la sua unica soluzione può essere determinata esattamente con un numero finito di tentativi (al più due se $i \in \mathrm{E}_2$, al più tre se $i \in \mathrm{E}_3$).

Dimostrazione. Siano $(K^{(m)}, H^{(m)}, h^{(m)})_{m\in N}$ una successione di elementi di $M'_n \times (M''_n)^2$ tale che:

$$\lim_{m\to+\infty} \inf_{i\in E_2} K_{ii}^{(m)} = +\infty\,, \quad \lim_{m\to+\infty} \inf_{i\in E_3} H_{ii}^{(m)} = +\infty\,, \quad \lim_{m\to+\infty} \inf_{i\in E_3} h_{ii}^{(m)} = +\infty$$

e, per ogni $m \in N$, $u_m = u(K^{(m)}, H^{(m)}, h^{(m)})$.

Detto v un arbitrario elemento di $\mathbf{K}$, intanto si ha:

$$\begin{aligned}(6)\qquad & (u_m - v)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ = (I_2 u_m - I_2 v)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ \geq \\ & \geq (I_2 u_m - \Sigma)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ \geq 0\,, \\ & (u_m - v)^T H^{(m)} (I_3 u_m - S)^+ = (I_3 u_m - I_3 v)^T H^{(m)} (I_2 u_m - S)^+ \geq \\ & \geq (I_3 u_m - S)^T H^{(m)} (I_3 u_m - S)^+ \geq 0\,, \\ & (u_m - v)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ = (I_3 u_m - I_3 v)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ \leq \\ & \leq (I_3 u_m - s)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ \leq 0\,,\end{aligned}$$

nonché, conseguentemente:

$$\begin{aligned}(7)\qquad & \alpha \| u_m - v \|^2_{R^n} \leq (u_m - v)^T A (u_m - v) = (u_m - v)^T A u_m - (u_m - v)^T A v = \\ & = (u_m - v)^T f - (u_m - v)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ - (u_m - v)^T H^{(m)} (I_2 u_m - S)^+ + \\ & + (u_m - v)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ - (u_m - v)^T A v \leq (u_m - v)^T f - \\ & - (u_m - v)^T A v \leq \| u_m - v \|_{R^n} \cdot \| f - A v \|_{R^n}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\qquad & (I_2 u_m - \Sigma)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ = (u_m - v)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ + \\ & + (I_2 v - \Sigma)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ \leq (u_m - v)^T K^{(m)} (I_2 u_m - \Sigma)^+ = \\ & = (u_m - v)^T f - (u_m - v)^T H^{(m)} (I_3 u_m - S)^+ + (u_m - v)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ - \\ & - (u_m - v)^T A u_m \leq (u_m - v)^T f - (u_m - v)^T A u_m\,,\end{aligned}$$

ed, analogamente:

$$(9)\qquad (I_3 u_m - S)^T H^{(m)} (I_3 u_m - S)^+ \leq (u_m - v)^T f - (u_m - v)^T A u_m\,,$$

$$(10)\qquad (s - I_3 u_m)^T h^{(m)} (s - I_3 u_m)^+ \leq (u_m - v)^T f - (u_m - v)^T A u_m\,.$$

La (7) implica che $\{u_m\}$ è limitata. Esiste dunque una sua estratta, che denotiamo con lo stesso simbolo, convergente verso un elemento w.

Dalle (8), (9) e (10) si trae che:

$$\forall i \in E_2 \qquad [(u_{m_i} - \Sigma_i)^+]^2 \leq \frac{1}{K_{ii}^{(m)}} \| u_m - v \|_{R^n} \cdot \| f - A u_m \|_{R^n}\,,$$

$$\forall i \in \mathrm{E}_3 \qquad [(u_{m_i} - \mathrm{S}_i)^+]^2 \leq \frac{1}{\mathrm{H}_{ii}^{(m)}} \| u_m - v \|_{\mathrm{R}^n} \cdot \| f - \mathrm{A}u_m \|_{\mathrm{R}^n} ,$$

$$\forall i \in \mathrm{E}_3 \qquad [(s_i - u_{m_i})^+]^2 \leq \frac{1}{h_{ii}^{(m)}} \| u_m - v \|_{\mathrm{R}^n} \cdot \| f - \mathrm{A}u_m \|_{\mathrm{R}^n}$$

e di qui, per $m \to +\infty$:

$$\mathrm{I}_2 w \leq \Sigma \qquad ; \qquad s \leq \mathrm{I}_3 w \leq \mathrm{S}$$

ossia $w \in \mathbf{K}$. Infine risultando, in virtù delle (6), qualunque siano $v \in \mathbf{K}$ ed $m \in \mathrm{N}$:

$$(v - u_m)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u_m - f) \geq 0$$

si ha:

$$(v - w)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}w - f) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbf{K}$$

e quindi $w = u$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. BROWDER (1966) – *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces*, Proc. N.A.S., 56, 419–425.

[2] R. W. COTTLE (1977) – *Numerical methods for complementarity problems in engineering and applied science*, Technical Report SOL 77-24, Department of Operations Research, Stanford University.

[3] R. GLOWINSKI, J. L. LIONS and R. TREMOLIERES (1976) – *Analyse numerique des inequations variationnelles*, Dunod.

[4] G. STAMPACCHIA (1969) – *Variational inequalities*, Pubbl. IAC, s. III, n. 25, Roma.