Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andreana Gandini Zucco

Sur une conjecture de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.5, p. 372–376.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_372_0>

Topologia. — *Sur une conjecture de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes.* Nota di ANDREANA GANDINI ZUCCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Secondo una congettura di Grünbaum ogni famiglia continua di curve che non sia un fascio ammette almeno un punto per il quale passano esattamente due curve della famiglia. Zamfirescu ha già dimostrato tale congettura per tutte quelle famiglie che contengono una curva per ciascun punto della quale passino al massimo altre due curve della famiglia ([5]). In questa nota tale congettura è dimostrata per altre classi di famiglie, per esempio per le famiglie che contengono una curva per ciascun punto della quale passino al massimo altre tre curve della famiglia e che contenga un sottoarco formato da punti per cui passano esattamente altre due curve della famiglia.

1. - On rappelle d'abord la notion de famille continue de courbes (F.C.C.) due à B. Grünbaum. Il s'agit (voir [2]) d'une famille $\mathscr{L}$ d'arcs de Jordan ouverts satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) chaque courbe $L \in \mathscr{L}$ est incluse (exceptant les extrémités) dans la composante bornée D de la complémentaire d'une courbe de Jordan fermée C, ses extrémités appartenant à C;

2°) chaque point $p \in C$ est l'extrémité d'une et seulement d'une courbe $L(p)$;

3°) si $L_1, L_2 \in \mathscr{L}$ sont deux courbes différentes, alors $L_1 \cap L_2$ est un seul point;

4°) la courbe $L(p)$ dépend continûment de $p \in C$.

On remarque que chacune des courbes de $\mathscr{L}$ est traversée par toutes les autres.

Soit $M_n(\mathscr{L})$ l'ensemble des points dans le domaine D par lesquels passent au moins n courbes de $\mathscr{L}$ et $T_n(\mathscr{L})$ l'ensemble des points par lesquels passent exactement n courbes. On dit que x est un point multiple si $x \in M_2(\mathscr{L})$. A toute courbe $L(p)$ de $\mathscr{L}$ on peut associer la fonction de Zamfirescu ([3]) dans la façon suivante. Soit A un de deux arcs de C ayant les extrémités p et $-p$, où $-p$ indique l'extrémité de $L(p)$ différente de p. Soient $\varphi : [a, b] \to A$ et $\psi : [c, d] \to L(p)$ deux homéomorphismes réalisant des représentations paramétriques des arcs A et $L(p)$, tels que $\varphi(a) = \psi(c) = p$, $\varphi(b) = \psi(d) = -p$. La fonction $f : (a, b) \to (c, d)$ définie par $f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$ est la fonction de Zamfirescu associée à $L(p)$. L'ensemble $\psi^{-1}(L(p) \cap M_2(\mathscr{L}))$ coïncide avec $f((a, b))$ et si $t \in L(p) \cap T_k(\mathscr{L})$ alors $card\, f^{-1}(\psi^{-1}(t)) = k - 1$ (et vice versa).

(*) Nella seduta del 12 maggio 1979.

2. – Dans la note [5] T. Zamfirescu a prouvé que la suivante conjecture de B. Grünbaum: « Pour toute famille continue de courbes (F.C.C.) $\mathscr{L}$ qui n'est pas un fascicule l'ensemble des points $T_2(\mathscr{L})$ n'est pas vide » est vraie s'il y a dans $\mathscr{L}$ une courbe sans points dans $M_4(\mathscr{L})$ ou si $M_5(\mathscr{L})$ est vide. Pour prouver que cette conjecture est vraie pour d'autres classes de F.C.C.'s (N. 3 et 4) on rappelle d'abord quelques propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle continues définies sur un intervalle fermé (et borné). On donne ces propriétés dans le cas le plus convenable pour les applications suivantes, c'est-à-dire comme propriétés des fonctions continues définies sur un intervalle ouvert (et borné) qui ont des limites finies dans les extrémités. Soit f une telle fonction définie sur l'intervalle ouvert (a, b) de $\mathbf{R}$, on a les résultats suivants:

LEMME 1. – *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x)$, *alors existe au moins un maximum ou un minimum absolu dans un point de* (a, b).

LEMME 2. – *Si* $\lim_{x\to a} f(x) \in f((a, b))$ *ou si* $\lim_{x\to b} f(x) \in f((a, b))$, *alors existe au moins un maximum ou un minimum absolu dans un point de* (a, b).

LEMME 3. – *Si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to b} f(x)$ *appartiennent à* $f((a, b))$, *alors il y a au moins un maximum et un minimum absolus dans deux points de* (a, b), *c'est-à-dire* $f((a, b))$ *est fermé.*

Fixé $n \in \mathbf{N}$, soit $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ une fonction continue bornée telle que pour tout $\lambda \in f((a, b))$ on ait $card\, f^{-1}(\lambda) \leq n$. T. Zamfirescu a déjà étudié une fonction analogue dans la note [3] et il a obtenu les résultats suivants, qu'on peut démontrer aussi pour notre fonction:

– la fonction a des limites finies dans a et b,

– tout point $x \in (a, b)$ est extrêmum relatif stricte des restrictions de la fonction f aux intervalles $(a, x]$ et $[x, b)$. On appelle point du type $(+, +)$ (resp. $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$) tout point x de (a, b) tel que x soit un maximum (resp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f/(a, x]$ et simultanément un maximum (resp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f/[x, b)$. On vérifie alors les propriétés suivantes:

LEMME 4. – *Soit* $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée. S'il y a un point* z *de* $[fr f((a, b))] \cap f((a, b))$ *et un niveau* v *tel que pour tout* $y \in [z, v)$ *on ait* $card f^{-1}(y) \leq 2m + 1$, *alors* $1 \leq card f^{-1}(z) \leq m$.

Démonstration. – On obtient ce résultat à la même façon du lemme 5 de la note [3] de Zamfirescu.

LEMME 5. – *Soit* $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée telle que pour chaque* $\lambda \in f((a, b))$ *on ait* $card f^{-1}(\lambda) \leq n$ *(n fixé). S'il y a un intervalle* (z_1, z_2) *contenu dans* $f((a, b))$ *tel que pour chaque* $z \in (z_1, z_2)$ *soit* $card\ f^{-1}(z) = 2k\ (\leq n)$, *alors* $[fr f((a, b))] \cap f((a, b)) \neq \varnothing$.

Démonstration. – La première partie est analogue à la démonstration du théor. 1 de [6], où cependant on considère le cas $card f^{-1}(z) = 2k - 1$. Soit z un point qui appartient à (z_1, z_2) et soient $x_1, \cdots, x_{2k}$ les points tels que $a < x_1 < \cdots < x_{2k} < b$ et $f(x_1) = \cdots = f(x_{2k}) = z$. On remarque que l'ensemble ordonné de $+$ et de $-$ obtenu en écrivant dans la place $(2r - 1)$-ème le premier signe de x_r et dans la place $2r$-ème le second signe de x_r $(r = 1, \cdots, 2k)$ doit contenir exactement $2k$ symboles $+$ et $2k$ symboles $-$, puisque au cas contraire dans un voisinage de z pour tous les points $z' \neq z$ on aurait $card f^{-1}(z') \neq 2k$. En outre le deuxième signe d'un des $2k$ points coïncide au premier signe du point suivant. Donc $f/(a, x_1]$ et $f/[x_{2k}, b)$ sont tous les deux maximums relatifs strictes ou tous les deux minimums relatifs strictes. On peut supposer qu'ils soient maximums relatifs strictes, alors on a $f(x) < z$ pour $x < x_1$ et $x > x_{2k}$. Ensuite on remarque que la fonction $g = f/[x_1, x_{2k}]$ continue definie dans un intervalle fermé a au moins un maximum absolu dans un point $x' \in [x_1, x_{2k}]$. Alors $f(x')$ appartient à $[fr f((a, b))] \cap f((a, b))$.

Dans les deux lemmes suivants on suppose seulement que f soit une fonction continue bornée.

LEMME 6. – *Si f est strictement monotone dans un intervalle (a, c) et dans un intervalle (d, b), si $\lim_{x \to a} f(x) \notin f((a, b))$ et si $\lim_{x \to a} f(x) \neq \lim_{x \to b} f(x)$, alors il y a un intervalle de points $y \in f((a, b))$ tels que $card f^{-1}(y) = 1$.*

Démonstration. – Les limites dans a et b existent puisque f est monotone dans (a, c) et (d, b). Soit $\lim_{x \to b} f(x) = \beta > \lim_{x \to a} f(x) = \alpha \notin f((a, b))$. On considère la fonction f^* prolongement par continuité de f et on remarque que $f^*(a) = \alpha$ est un minimum. En outre, puisque f^* est strictement croissante sur $[a, c)$, le niveau $f(c) = \alpha + \varepsilon_1$ $(0 < \varepsilon_1 < \beta - \alpha)$ est tel que pour chaque $y < \alpha + \varepsilon_1$ il n'y a qu'une image inverse dans $[a, c)$. La fonction $f^*/[c, b]$ a au moins un minimum dans un point $t \in [c, b]$ tel que $f^*(t) = \alpha + \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 > 0)$. Alors dit $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a que $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$ est l'intervalle cherché.

LEMME 7. – *Si f est strictement monotone dans un intervalle (a, c), si $f((a, b))$ est ouvert et s'il y a un $\lambda \in f((a, b))$ tel que $card f^{-1}(\lambda)$ soit fini, alors il y a un intervalle de points $y \in f((a, b))$ tels que $card f^{-1}(y) = 1$.*

Démonstration. – Puisqu'il y a un $\lambda \in f((a, b))$ tel que $card f^{-1}(\lambda) = m$, on considère les points $x_1 < \cdots < x_m$ tels que $f(x_1) = \cdots = f(x_m) = \lambda$. Soit par exemple x_1 un maximum relatif stricte de $f/(a, x_1]$, alors on a $f(x) < \lambda$ pour tout $x < x_1$. Il est évident que x_m est un minimum relatif stricte de $f/[x_m, b)$, puisque au cas contraire on a $f(x) < \lambda$ pour tout $x > x_m$ et donc le maximum absolu de la fonction $f/[x_1, x_m]$ est aussi un maximum de f et par conséquent $f((a, b))$ n'est pas ouvert. Alors on a $f(x) > \lambda$ pour tout $x > x_m$. Puisque f est monotone dans (a, c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Soit $\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$, on a $\alpha \leq \lambda$. Il est évident que $\alpha \notin f((a, b))$, puisque au cas contraire la fonction $f^* : [a, x_m] \to \mathbf{R}$ définie par $f^*(a) = \alpha$, $f^*/(a, x_m] = f/(a, x_m]$ a au moins un minimum absolu qui est aussi un minimum de f et par suite $f((a, b))$ n'est pas ouvert. Alors pour chaque $\mu \in f((a, b))$ on a $\mu > \alpha$. D'autre part la fonction $f/[x_1, x_m]$ a un minimum en un point $t \in [x_1, x_m]$, alors dit $\gamma = \inf(f(c), f(t))$ on a que (α, γ) est l'intervalle cherché.

3. – On revient maintenant au problème annoncé de trouver des F.C.C.'s $\mathscr{L}$ qui ont au moins un point de $T_2(\mathscr{L})$.

THEOREME 8. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *telle que*:

i) $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *ne soit pas ouvert sur* $L(p)$,

ii) $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *soit un arc* $(t, s]$ [1] *qui contient un sous-arc* $(r, s]$ *sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$, *alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. – On considère le point s et la fonction f associée à $L(p)$: on déduit de la définition de ψ que $\psi^{-1}(s) \in [fr f((a, b))] \cap f((a, b))$, alors (lemme 4) on a $card\, f^{-1}(\psi^{-1}(s)) = 1$, c'est-à-dire $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$. Par suite on a:

COROLLAIRE 9. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$ *telle que* $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *ne soit pas ouvert, alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

DEFINITION 1. – $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* $p_0 \in C$, *si* $p \to p_0$ *sur* C *et* $L(p) \neq L(p_0)$ *impliquent que* $L(p) \cap L(p_0)$ *converge* (cette propriété ne diffère pas substantiellement de celle énoncée en [6]).

COROLLAIRE 10. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$ *et si* $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* p, *alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. – Pour la fonction f associée à $L(p)$ on a que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ existent et, puisque $\mathscr{L}$ a la propriété C_2 dans p, elles sont égales. Alors la thèse suit du lemme 1 et du cor. 9.

THEOREME 11. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *vérifiant les propriétés suivantes*:

i) *il est possible de trouver un* n *tel que* $L(p) \cap M_{n+2}(\mathscr{L}) = \varnothing$,

ii) $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *contient un sous-arc de points* $T_{2k+1}(\mathscr{L})$ *(et donc* $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *n'est pas ouvert sur* $L(p)$*)*,

iii) $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *est un arc* $(t, s]$ *(ou bien* $[t, s]$*) qui contient un sous-arc* $(r, s]$ *sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$, *alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. – On obtient ce résultat d'après les lemmes 5 et 4.

Par suite on a:

COROLLAIRE 12. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$ *avec un arc de points de* $T_3(\mathscr{L})$, *alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

(1) Soit $[t, s]$ un arc de $L(p)$, nous écrivons « arc $(t, s]$ » au lieu de « arc $[t, s] - \{t\}$ » et « *arc* (t, s) » au lieu de « *arc* $[t, s] - \{\{t\} \cup \{s\}\}$ ».

4. – Maintenant on veut trouver une F.C.C. $\mathcal{L}$ qui a au moins un arc de points de $T_2(\mathcal{L})$. Alors il faut donner les définitions suivantes:

DEFINITION 2. – $\mathcal{L}$ *est* semimonotone (strictement semimonotone) *dans* $p \in C$, *s'il y a un arc* γ *de* C *avec une extrémité dans* p *tel que* $L(x) \cap L(p)$ *soit une fonction monotone* (*strictement monotone*) *de* x *sur* γ.

DEFINITION 3. – $\mathcal{L}$ *est* monotone (strictement monotone) *dans* $p \in C$, *s'il y a un arc* γ *de* C *avec* $p \in \operatorname{int} \gamma$, *tel que* $L(x) \cap L(p)$ *soit une fonction monotone* (*strictement monotone*) *de* x *sur chaque composante de* $\gamma - \{p\}$.

THEOREME 13. – *S'il y a dans* $\mathcal{L}$ *une courbe* $L(p)$ *telle que*:

i) $L(p) \cap M_2(\mathcal{L})$ *ne soit pas fermé sur* $L(p)$ *et si*:

ii) $\mathcal{L}$ *n'a pas la propriété* C_2 *dans* p,

iii) $\mathcal{L}$ *est strictement monotone dans* p, *alors il y a sur* $L(p)$ *un arc de points de* $T_2(\mathcal{L})$.

Démonstration. – Puisque $L(p) \cap M_2(\mathcal{L})$ n'est pas fermé, on déduit que $f((a, b))$ n'est pas fermé, où f est la fonction associée à $L(p)$. Par conséquent d'aprés le lemme 3, au moins une de deux limites de la fonction f (qui existent puisque $\mathcal{L}$ est monotone dans p) n'appartient pas à $f((a, b))$. Ces limites sont différentes puisque par hypothèse $\mathcal{L}$ n'a pas la propriété C_2 dans p. Donc la thèse suit du lemme 6.

THEOREME 14. – *S'il y a dans* $\mathcal{L}$ *une courbe* $L(p)$ *telle que*:

i) $L(p) \cap M_2(\mathcal{L})$ *soit ouvert sur* $L(p)$,

ii) $L(p)$ *ait au moins un point multiple de multiplicité finie et si*:

iii) $\mathcal{L}$ *est strictement semimonotone dans* p, *alors il y a sur* $L(p)$ *un arc de points de* $T_2(\mathcal{L})$.

Démonstration. – On a la thèse d'après le lemme 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜMBAUM (1966) – *Continuous families of curves*, «Can. J. Math.», *18*, 529–537.
[2] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note I), «Rend. Lincei», ser. VIII, *42* (8), 771–774.
[3] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note II), «Rend. Lincei», ser. VIII, *43* (1–2), 13–17.
[4] T. ZAMFIRESCU (1969) – *On planar continuous families of curves*, «Can. J. Math.», *21*, 513–530.
[5] T. ZAMFIRESCU (1972) – *Sur les familles continues de courbes* (Note V), «Rend. Lincei», ser. VIII, *53* (6), 505–507.
[6] T. ZAMFIRESCU – Spreads (à paraître dans «Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg»).