
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

TULLIO VALENT

Su un principio generale di esistenza in analisi lineare

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 66 (1979), n.5, p. 331–337.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_331_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Su un principio generale di esistenza in analisi lineare.* Nota di TULLIO VALENT^(*), presentata^(**) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — In § 1 we show that the well-known "Fichera existence principle in Banach spaces" (See [3], pp. 174-178; [2], [4], pp. 30-50; [5], pp. 11-16) holds—suitably enunciated—in locally convex Hausdorff spaces: the (very simple) proof is founded on the remark that the existence problem is equivalent to a property of inclusion of dual spaces.

In § 2 we explain how this principle includes, as particular cases, the so-called "Theorem of surjection of Fréchet spaces" (see [7], Theor. 37.2) and a generalisation of it—recently proved (with different method) by G. Zampieri [8]—which are fundamental in some topics concerning the theory of linear partial differential operators.

È noto come il «Principio di esistenza di G. Fichera» (v. [3], pp. 174-178, [2], [4], pp. 30-50, oppure [5], pp. 11-16) sia uno strumento generale per la trattazione dei problemi esistenziali negli spazi di Banach: esso è importante non solo perché costituisce una sintesi e una generalizzazione di tutti i metodi esistenziali usati nella teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali nell'ambito degli spazi di Banach, ma soprattutto perché stabilisce un legame tra esistenza e stime *a priori* per le soluzioni.

Nella presente Nota si mostra come tale principio esistenziale sussista, opportunamente precisato, negli spazi localmente convessi e di Hausdorff; la dimostrazione (molto semplice) si basa sulla constatazione che il problema esistenziale è riconducibile a una proprietà di inclusione di spazi duali e su noti teoremi riguardanti la teoria della dualità negli spazi vettoriali topologici.

Al § 2 si fa vedere come tale principio (generalizzato) contenga tra l'altro, come casi particolari, il noto «Teorema di suriezione tra spazi di Fréchet» (v. [7], Teorema 37.2) e una sua generalizzazione ottenuta recentemente (per altra via) da G. Zampieri [8] e usata per studiare la « C^∞ -risolubilità globale» di un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti.

1. Siano L uno spazio vettoriale sul corpo complesso $\mathbf{C}$, E_1 e E_2 due spazi (vettoriali topologici su $\mathbf{C}$) localmente convessi e di Hausdorff, E'_1 e E'_2 i loro duali topologici, $\mathcal{P}_1$ un insieme di seminorme su E_1 definente la topologia di E_1 e $\mathcal{P}_2$ un insieme filtrante⁽¹⁾ di seminorme su E_2 definente la topologia di E_2 .

(*) Seminario matematico dell'Università di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1979.

(1) $\mathcal{P}_2$ è filtrante se per ogni $p', p'' \in \mathcal{P}_2$ esiste $p \in \mathcal{P}_2$ tale che $p \geq \sup(p', p'')$.

Siano $u_1: L \rightarrow E_1$, $u_2: L \rightarrow E_2$ applicazioni lineari e siano $\text{Ker } u_1$, $\text{Ker } u_2$ i loro nuclei ⁽²⁾.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA I. *Se il sottospazio $u_2(L)$ di E_2 è di Mackey [il che accade, per esempio, se E_2 è metrizzabile] ⁽³⁾ le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(a₁) *Per ogni $x'_1 \in E'_1$ esiste $x'_2 \in E'_2$ tale che* ⁽⁴⁾

$$(1) \quad \langle u_1(x), x'_1 \rangle = \langle u_2(x), x'_2 \rangle \quad \forall x \in L.$$

(b₁) *Risulta $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$ e l'applicazione $\varphi: u_2(x) \mapsto u_1(x)$, del sottospazio $u_2(L)$ di E_2 in E_1 è continua.*

(c₁) *Per ogni seminorma $p_1 \in \mathcal{P}_1$ esistono una seminorma $p_2 \in \mathcal{P}_2$ e un numero $c > 0$ tali che*

$$(2) \quad p_1(u_1(x)) \leq c p_2(u_2(x)) \quad \forall x \in L.$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che la condizione $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$ è chiaramente (se si ha presente il Teorema di Hahn-Banach) necessaria affinché sussista (a₁) e che, se $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$, ha senso considerare l'applicazione $\varphi: u_2(x) \mapsto u_1(x)$ di $u_2(L)$ in E_1 .

Si osservi poi che (a₁) equivale all'affermazione (a₁)' seguente.

(a₁)' *Risulta $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$ e sussiste l'implicazione*

$$(3) \quad x'_1 \in (u_1(L))' \Rightarrow x'_1 \circ \varphi \in (u_2(L))',$$

ove $(u_1(L))'$ e $(u_2(L))'$ sono i duali topologici del sottospazio $u_1(L)$ di E_1 e del sottospazio $u_2(L)$ di E_2 .

Infatti (a₁) afferma che, per ogni $x'_1 \in E'_1$, la forma lineare $u_2(x) \mapsto \langle u_1(x), x'_1 \rangle$, ($x \in L$), è la restrizione a $u_2(L)$ di qualche $x'_2 \in E'_2$; d'altra parte, se $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$, si ha $x'_1 \circ \varphi: u_2(x) \mapsto \langle u_1(x), x'_1 \rangle$, donde la conclusione in virtù del Teorema di Hahn-Banach.

(2) Il nucleo $\text{Ker } u$ di un'applicazione lineare $u: E \rightarrow F$, (con E, F spazi vettoriali), è definito da $\text{Ker } u = \{x \in E: u(x) = 0\}$.

(3) Uno spazio localmente convesso E dicesi uno *spazio di Mackey* se la sua topologia coincide con la topologia di Mackey su E rispetto alla dualità naturale tra E e E' , cioè con la topologia della convergenza uniforme su ogni parte convessa equilibrata e debolmente compatta di E' . (Trattasi della più grande topologia localmente convessa su E compatibile con la dualità naturale tra E e E').

Si osservi, che, se F_1, F_2 sono sottospazi vettoriali del duale algebrico di uno spazio vettoriale E e $\tau(E, F_i)$, ($i = 1, 2$), è la topologia di Mackey su E rispetto alla dualità naturale tra E e F_i , allora da $F_1 \subseteq F_2$ segue $\tau(E, F_1) \subseteq \tau(E, F_2)$.

È noto (v. ad esempio [6], p. 173) che uno spazio localmente convesso metrizzabile, oppure « barreled », è uno spazio di Mackey; pertanto *il sottospazio $u_2(L)$ di E_2 è senz'altro di Mackey se E_2 è metrizzabile.*

(4) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la dualità naturale tra uno spazio vettoriale topologico e il suo duale topologico.

È ovvio che $(b_1) \Rightarrow (a_1)'$. Mostriamo che $(a_1)' \Rightarrow (b_1)$, cioè che φ è continua se vale (3).

Siano $\mathcal{E}_1$ la topologia del sottospazio $u_1(L)$ di E_1 e $\mathcal{E}_\varphi$ la massima topologia localmente convessa sullo spazio vettoriale $u_1(L)$ per cui φ è continua. È evidente che, se x'_1 è una forma lineare su $u_1(L)$, si ha

$$x'_1 \in (u_1(L), \mathcal{E}_\varphi)' \iff x'_1 \circ \varphi \in (u_2(L))'.$$

Pertanto (3) equivale all'implicazione $x'_1 \in (u_1(L), \mathcal{E}_1)' \Rightarrow x'_1 \in (u_1(L), \mathcal{E}_\varphi)'$, cioè all'inclusione

$$(4) \quad (u_1(L), \mathcal{E}_1)' \subseteq (u_1(L), \mathcal{E}_\varphi)'.$$

Poichè, per ipotesi, $u_2(L)$ (con la topologia indottavi da quella di E_2) è uno spazio di Mackey, tale è lo spazio quoziente $u_2(L)/\text{Ker } \varphi$ (v., ad esempio, [6], Teorema 18.9); di conseguenza anche $(u_1(L), \mathcal{E}_\varphi)$ è uno spazio di Mackey, perchè isomorfo (come spazio vettoriale topologico) a $u_2(L)/\text{Ker } \varphi$. Pertanto da (4) segue $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_\varphi$, donde la continuità di $\varphi: u_2(L) \rightarrow E_1$.

Infine, (b_1) e (c_1) sono equivalenti perchè (2) implica $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$ e la condizione (c_1) è notoriamente necessaria e sufficiente per la continuità di φ .

Q.E.D.

Si noti che da (1) segue $u_1(\text{Ker } u_2) \subseteq \text{Ker } x'_1$, cioè

$$(5) \quad \langle u_1(x), x'_1 \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } u_2$$

e che (5) è soddisfatta qualunque sia $x'_1 \in E'_1$ se e solo se $\text{Ker } u_2 \subseteq \text{Ker } u_1$.

Se, invece, $\text{Ker } u_2 \not\subseteq \text{Ker } u_1$, (5) è una condizione di compatibilità sul dato $x'_1 \in E'_1$ per l'equazione (1).

Detta π la proiezione canonica di E_1 sullo spazio (localmente convesso e di Hausdorff) $\tilde{E}_1 = E_1/\overline{u_1(\text{Ker } u_2)}$, poniamo

$$\tilde{u}_1 = \pi \circ u_1.$$

Ricordando che la topologia di $\tilde{E}_1$ è definita dall'insieme delle seminorme $\tilde{p}_1, (p_1 \in \mathcal{P}_1)$, ove

$$\tilde{p}_1(\pi(x_1)) = \inf_{y \in \text{Ker } u_2} p_1(x_1 + u_1(y)), \quad (x_1 \in E_1),$$

è immediato constatare che, se $x'_1 \in E'_1$ verifica (5), la forma lineare $\tilde{x}'_1$ su $\tilde{E}_1$ definita da ⁽⁵⁾

$$\langle \pi(x_1), \tilde{x}'_1 \rangle = \langle x_1, x'_1 \rangle, \quad (x_1 \in E_1)$$

è continua e che, viceversa, se $\tilde{x}'_1 \in (\tilde{E}_1)'$, la forma lineare x'_1 su E_1 definita da (6), cioè la forma lineare $E_1 \ni x_1 \mapsto \langle \pi(x_1), \tilde{x}'_1 \rangle$, è continua e verifica (5).

(5) Si noti che, se $x'_1 \in E'_1$ verifica (5), allora da $x_1, y_1 \in E_1, \pi(x_1) = \pi(y_1)$ segue $\langle x_1, x'_1 \rangle = \langle y_1, x'_1 \rangle$ e quindi ha senso considerare l'applicazione $\tilde{x}'_1: \pi(x_1) \mapsto \langle x_1, x'_1 \rangle$, $(x_1 \in E_1)$, di $\tilde{E}_1$ in $\mathbf{C}$.

Pertanto l'affermazione: per ogni $x'_1 \in E'_1$ verificante (5) esiste $x'_2 \in E'_2$ tale che valga (1) equivale all'affermazione: per ogni $\tilde{x}'_1 \in (\tilde{E}_1)'$ esiste $x'_2 \in E'_2$ tale che

$$\langle \tilde{u}_1(x), \tilde{x}'_1 \rangle = \langle u_2(x), x'_2 \rangle \quad \forall x \in L.$$

In base a queste considerazioni e al fatto che, evidentemente, $\text{Ker } u_2 \subseteq \subseteq \text{Ker } \tilde{u}_1$, del Teorema 1 segue immediatamente il seguente Teorema 2 (del quale, d'altra parte, il Teorema 1 è un caso particolare).

TEOREMA 2. *Se il sottospazio $u_2(L)$ di E_2 è di Mackey [il che accade, per esempio, se E_2 è metrizzabile] le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(a₂) *Per ogni $x'_1 \in E'_1$ verificante (5) esiste $x'_2 \in E'_2$ tale che valga (1).*

(b₂) *L'applicazione $u_2(x) \mapsto \tilde{u}_1(x)$, del sottospazio $u_2(L)$ di E_2 in $E_1/u_1(\text{Ker } u_2)$ è continua.*

(c₂) *Per ogni seminorma $p_1 \in \mathcal{P}_1$ esistono una seminorma $p_2 \in \mathcal{P}_2$ e un numero $c > 0$ tali che*

$$\inf_{y \in \text{Ker } u_2} p_1(u_1(x) + u_1(y)) \leq c p_2(u_2(x)) \quad \forall x \in L.$$

2. Nel caso che E_1 e E_2 siano spazi di Banach i Teoremi 1 e 2 altro non sono che i Teoremi 2.I e 2.II di [5].

Mostriamo ora come alcuni teoremi-fondamentali per le loro applicazioni alla teoria degli operatori (e dei sistemi di operatori) differenziali lineari - siano in effetti contenuti nel Teorema 2 come casi particolari, o, comunque, possano ricondursi al Teorema 2.

Ricordiamo che, se E, F sono spazi vettoriali topologici e $u: E \rightarrow F$ è un'applicazione lineare e continua, la trasposta ${}^t u: F' \rightarrow E'$ di u è definita da ${}^t u(y') = y' \circ u$, ($y' \in F'$) e che la chiusura debole di ${}^t u(F')$ in E' coincide con il polare $(\text{Ker } u)^0 = \{x' \in E' : \langle x, x' \rangle = 0 \ \forall x \in \text{Ker } u\}$ di $\text{Ker } u$. (V., ad esempio, [7], p. 364).

La prima particolarizzazione del Teorema 2 che vogliamo mettere in evidenza è la seguente.

I. *Siano E, F spazi localmente convessi e di Hausdorff e $u: E \rightarrow F$ una applicazione lineare e continua. Se il sottospazio $u(E)$ di F è di Mackey [e quindi, per esempio, se F è metrizzabile], allora u è relativamente aperta ⁽⁶⁾ se e solo se ${}^t u(F') = (\text{Ker } u)^0$, cioè se e solo se ${}^t u(F')$ è debolmente chiuso in E' .*

Per convincersene basta assumere, nell'enunciato del Teorema 2, $L = E_1 = E$, $E_2 = F$, $u_1 = \text{identità di } E \text{ in } E$, $u_2 = u$.

(6) cioè mappa ogni aperto di E in un aperto del sottospazio $u(E)$ di F .

Tenendo presente, poi, che (avendosi, ovviamente, $(u(E))^0 = \text{Ker } {}^t u$) ${}^t u$ è iniettiva se e solo se $u(E)$ è denso in F e ricordando il «teorema della mappa aperta», da I si deduce immediatamente il seguente teorema, noto come il «Teorema di suriezione tra spazi di Fréchet» (v. Teorema 37.2 di [7]).

II. *Siano E e F due spazi di Fréchet ⁽⁷⁾ e $u: E \rightarrow F$ un'applicazione lineare e continua. Allora u è suriettiva se e solo se ${}^t u$ è iniettiva e ${}^t u(F')$ è debolmente chiuso in E' .*

Vogliamo segnalare, infine, un'altra conseguenza del Teorema 2: è il teorema seguente, che generalizza II.

III. *Siano E, F spazi di Fréchet e G, H spazi localmente convessi e di Hausdorff. Siano $u: E \rightarrow H, v: G \rightarrow F, l: G \rightarrow E, m: F \rightarrow H$ applicazioni lineari e continue tali che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & H \\ l \uparrow & & \uparrow m \\ G & \xrightarrow{v} & F \end{array}$$

sia commutativo (cioè tali che $u \circ l = m \circ v$). Detta π_u la proiezione canonica di E su $E/\text{Ker } u$, sia $\bar{u}: E/\text{Ker } u \rightarrow u(E) \subseteq H$ la biiezione lineare (e continua) tale che $u = \bar{u} \circ \pi_u$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

- (i) $m(\overline{v(G)}) \subseteq u(E)$.
- (ii) ${}^t l(\overline{{}^t u(H')}) \subseteq {}^t v(F')$, ove $\overline{{}^t u(H')}$ è la chiusura debole di ${}^t u(H')$ in E' .
- (iii) L'applicazione (lineare) $\varphi = \bar{u}^{-1} \circ m|_{v(G)}$ del sottospazio $v(G)$ di F in $E/\text{Ker } u$ è continua.

Dimostrazione di III. L'equivalenza delle condizioni (ii) e (iii) è un'immediata conseguenza del Teorema 2. Infatti si osservi che, essendo $\overline{{}^t u(H')} = (\text{Ker } u)^0$, (ii) equivale alla proprietà:

$$\forall x' \in (\text{Ker } u)^0 \quad \exists y' \in F' \quad \text{tale che } {}^t l(x') = {}^t v(y')$$

ossia, come si riconosce subito, alla proprietà:

$$\forall x' \in (\text{Ker } u)^0 \quad \exists y' \in F' \quad \text{tale che } \langle l(z), x' \rangle = \langle v(z), y' \rangle \quad \forall z \in G.$$

(7) Uno spazio di Fréchet è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, metrizzabile e completo.

Ebbene, il Teorema 2 [ove si assuma $L = G$, $E_1 = E$, $E_2 = F$, $u_1 = I$, $u_2 = v$] asserisce che tale proprietà è vera se e solo se è continua l'applicazione

$$v(z) \mapsto \pi_u(l(z)), \quad (z \in G),$$

del sottospazio $v(G)$ di F in $E/\text{Ker } u$; questa applicazione è appunto $\bar{u}^{-1} \circ m|_{v(G)}$ dato che $u \circ l = m \circ v$.

Proviamo che anche (i) è equivalente a (iii). Se sussiste (i) ha senso considerare l'applicazione $\psi = \bar{u}^{-1} \circ m|_{\overline{v(G)}}$ del sottospazio $\overline{v(G)}$ di F in $E/\text{Ker } u$. Ricordando che m e $\bar{u}$ sono continue si verifica facilmente che il grafico di ψ è chiuso ⁽⁸⁾ in $F \times E/\text{Ker } u$. Allora (essendo il sottospazio $\overline{v(G)}$ di E e lo spazio quoziente $E/\text{Ker } u$ metrizzabili e completi, perchè tali sono E e F) ψ è continua in virtù del « Teorema del grafico chiuso » e quindi vale (iii). Viceversa se sussiste (iii), detta $\bar{\varphi}$ l'applicazione lineare e continua del sottospazio $\overline{v(G)}$ di F in $E/\text{Ker } u$ tale che $\bar{\varphi}|_{v(G)} = \varphi (= \bar{u}^{-1} \circ m|_{v(G)})$ [certamente esistente (e unica) perchè $E/\text{Ker } u$ è completo e di Hausdorff], si ha $m|_{v(G)} = \bar{u} \circ \varphi = (\bar{u} \circ \bar{\varphi})|_{v(G)}$, donde $m|_{\overline{v(G)}} = \bar{u} \circ \bar{\varphi}$, donde (i).

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. Il Teorema III è effettivamente una generalizzazione del teorema II, perchè quest'ultimo può enunciarsi dicendo: « se E, F sono spazi di Fréchet e $u: E \rightarrow F$ è un'applicazione lineare e continua, sono equivalenti le seguenti affermazioni

$$(i)' \quad \overline{u(E)} \subseteq u(E)$$

$$(ii)'' \quad \overline{t_u(F')} \subseteq t_u(F'), \text{ ove } \overline{t_u(F')} \text{ è la chiusura debole in } E' \text{ di } t_u(F') \text{ »}$$

e quindi si ottiene dal Teorema III assumendo $E = G$, $F = H$, $u = v$, $l =$ identità di E in sè, $m =$ identità di F in sè.

L'equivalenza delle condizioni (i) e (ii) nelle ipotesi del Teorema III è stata recentemente dimostrata, per altra via, da G. Zampieri [8], il quale si è servito di questo risultato per provare (in [9]) che in certe situazioni la « C^∞ -risolubilità semiglobale » di un sistema sovradeterminato di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti implica la « C^∞ -risolubilità globale », nello spirito delle congetture di E. De Giorgi [1].

(8) Infatti, se $(y, \pi_u(x)) \in F \times E/\text{Ker } u$ e $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ è una rete in $\overline{v(G)}$ tale che $y_\alpha \rightarrow y$ in F e $\psi(y_\alpha) \rightarrow \pi_u(x)$ in $E/\text{Ker } u$, risulta $m(y_\alpha) \rightarrow m(y)$ in H (per la continuità di m) e $m(y_\alpha) \rightarrow \bar{u}(\pi_u(x))$ in H (per la continuità di $\bar{u}$); pertanto $m(y) = \bar{u}(\pi_u(x))$, cioè $\psi(y) = \pi_u(x)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. DE GIORGI (1975) - *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », II, 77-79.
- [2] S. FAEDO (1957) - *Su un principio di esistenza nell'Analisi lineare*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », II, fasc. 1-2, 1-8.
- [3] G. FICHERA (1954) - *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, « Atti del Convegno sulle Equazioni alle derivate parziali », Ed. Cremonese, Roma, pp. 174-227.
- [4] G. FICHERA (1958) - *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Corsi INAM 1956-57, Ed. Veschi, Roma.
- [5] G. FICHERA (1965) - *Linear elliptic differential systems and eingevalue problems*, « Lecture Notes in Math. », 8, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [6] J. L. KELLEY-I. NAMIOKA (1963) - *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand Comp., Inc.
- [7] F. TREVES (1967) - *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York-London.
- [8] G. ZAMPIERI - *Un'estensione del Teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet. Qualche sua applicazione*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova » (in corso di stampa).
- [9] G. ZAMPIERI - *On some conjectures by E. De Giorgi*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova » (in corso di stampa).