Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Maceri, Raffaele Toscano, Aldo Maceri

Alcuni problemi di vincolo unilaterale per sistemi di travi linearmente elastici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.4, p. 255–262.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_4_255_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Meccanica. — *Alcuni problemi di vincolo unilaterale per sistemi di travi linearmente elastici.* Nota I di FRANCO MACERI (*), RAFFAELE TOSCANO (**) e ALDO MACERI (***), presentata (****) dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — A unilateral constraint problem for linear systems of elastic beams is analyzed in this paper. Conditions of existence, uniqueness and continuity of the solution are given. A practical computation algorithm is also included.

1. In questo lavoro ci occupiamo di strutture monodimensionali in regime linearmente elastico, agli spostamenti delle quali siano imposte limitazioni unilaterali in corrispondenza di un numero finito di punti.

Più precisamente, dato il sistema di equazioni di equilibrio:

$$Au = f$$

che risolve, con il metodo degli spostamenti, la struttura assegnata (la matrice reale e simmetrica A si suppone definita positiva, il che assicura l'esistenza e l'unicità delle componenti generalizzate di spostamento nodali u quali che siano i carichi f), studiamo nel paragrafo 2 gli effetti di ostacoli (o vincoli) unilaterali rigidi imposti in corrispondenza di alcune delle componenti u, stabilendo i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati per la soluzione del problema; analizziamo inoltre la questione, di rilevante interesse tecnico, della struttura soggetta a carico dipendente linearmente da un parametro, discutendo poi un algoritmo di calcolo.

2. Siano: n un intero maggiore di 1, $\{E_1, E_2, E_3\}$ una partizione di $\{1, \cdots, n\}$, $\| v \|_{R^n} = (v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}$ $\forall v = (v_1, \cdots, v_n) \in R^n$.

Denotiamo con:

M_n lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali munito della norma: $\| A \|_{M_n} = \sup_{\|v\|_{R^n}=1} = \| Av \|_{R^n}$;

M_n^+ il sottoinsieme di M_n costituito dalle matrici simmetriche e definite positive;

(*) Dipartimento di Strutture dell'Università della Calabria.
(**) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(***) Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(****) Nella seduta del 21 aprile 1979.

I_k, per $k \in \{1, 2, 3\}$, la matrice quadrata di ordine n avente pari a zero tutti i termini tranne quelli diagonali con indice di riga appartenente a E_k, che sono pari a 1;

R_2^n l'insieme $\{v = (v_1, \cdots, v_n) \in R^n \mid v_i = 0 \quad \forall i \in E_1 \cup E_3\}$ e con R_3^n l'insieme $\{v = (v_1, \cdots, v_n) \in R^n \mid v_i = 0 \quad \forall i \in E_1 \cup E_2\}$.

Precisiamo inoltre che, $\forall v = (v_1, \cdots, v_n) \in R^n$, indicheremo ancora con v il vettore colonna:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Studiamo il:

Problema (P) – Dati: $A \in M_n^+$, $f = (f_1, \cdots, f_n) \in R^n$, $\Sigma = (\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n) \in R_2^n$, $s = (s_1, \cdots, s_n) \in R_3^n$, $S = (S_1, \cdots, S_n) \in R_3^n$, con $s \leq S$ [1], e posto:

$$\mathbf{K} = \{v \in R^n \mid I_2 v \leq \Sigma, s \leq I_3 v \leq S\},$$

trovare $u \in \mathbf{K}$ tale che:

$$(1) \qquad \begin{cases} I_1(Au - f) = 0 \\ I_2(Au - f) \leq 0 \\ (\Sigma - I_2 u)^T (Au - f) + (S - I_3 u)^T (Au - f)^- + \\ \qquad + (s - I_3 u)^T (Au - f)^+ = 0 \text{ [2]}. \end{cases}$$

TEOREMA 1. *Il problema* (P) *ammette soluzione unica.*

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che il problema (P) equivale alla disequazione variazionale:

$$(2) \qquad u \in \mathbf{K} : (v - u)^T (Au - f) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbf{K}.$$

Sia infatti u soluzione del problema (P). Per ogni $v \in \mathbf{K}$ si ha:

$$(v - u)^T I_1 (Au - f) = 0;$$

$$(v - u)^T I_2 (Au - f) = (I_2 v - I_2 u)^T I_2 (Au - f) = (I_2 v - \Sigma)^T I_2 (Au - f) + \\ + (\Sigma - I_2 u)^T (Au - f) = (I_2 v - \Sigma)^T I_2 (Au - f) \geq 0;$$

$$(v - u)^T I_3 (Au - f) = (I_3 v - I_3 u)^T I_3 (Au - f) = (I_3 v - I_3 u)^T [(Au - f)^+ + \\ + (Au - f)^-] = (I_3 v - S)^T [(Au - f)^+ + (Au - f)^-] +$$

(1) $\forall v, w \in R^n$, la notazione $v \lesseqgtr w$ va intesa nel senso che $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ $v_i \lesseqgtr w_i$.

(2) Se $v = (v_1, \cdots, v_n) \in R^n$, v^+ [risp. v^-] denota l'elemento di R^n $(\max\{0, v_1\}, \cdots, \max\{0, v_n\})$ [risp. $(\min\{0, v_1\}, \cdots, \min\{0, v_n\})$].

$$+ (\mathrm{S} - \mathrm{I}_3 u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{+} = (\mathrm{I}_3 v - \mathrm{I}_3 u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{+} +$$
$$+ (\mathrm{I}_3 v - \mathrm{S})^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{-} = (\mathrm{I}_3 v - s)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{+} +$$
$$+ (\mathrm{I}_3 v - \mathrm{S})^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{-} \geq 0 ;$$

sicchè :

$$(v - u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f) = (v - u)^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_1 (\mathrm{A}u - f) + (v - u)^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_2 (\mathrm{A}u - f) +$$
$$+ (v - u)^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_3 (\mathrm{A}u - f) \geq 0 .$$

Viceversa, supponiamo che u sia soluzione della (2). Circa la prima delle (1), $\forall w \in \mathrm{R}^n$, risultando $u + \mathrm{I}_1 w \in \mathbf{K}$ e $u - \mathrm{I}_1 w \in \mathbf{K}$, si ha $w^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_1 (\mathrm{A}u - f) = (\mathrm{I}_1 w)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f) = 0$.

Circa la seconda delle (1), $\forall z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathrm{R}^n$, con $z_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, risultando $u - \mathrm{I}_2 z \in \mathbf{K}$, si ha $z^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_2 (\mathrm{A}u - f) = (\mathrm{I}_2 z)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f) \leq 0$. Per provare la terza delle (1), poniamo:

$$\mathrm{E}_3^{(1)} = \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (\mathrm{A}u - f)_i^{+} = 0\} \quad , \quad \mathrm{E}_3^{(2)} = \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (\mathrm{A}u - f)_i^{+} > 0\} ,$$
$$\mathrm{E}_3^{(3)} = \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (\mathrm{A}u - f)_i^{-} = 0\} \quad , \quad \mathrm{E}_3^{(4)} = \{i \in \mathrm{E}_3 \mid (\mathrm{A}u - f)_i^{-} < 0\}$$

e denotiamo, $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$, con $\mathrm{I}_3^{(j)}$ la matrice quadrata di ordine n avente pari a zero tutti i termini tranne quelli diagonali con indice di riga appartenente ad $\mathrm{E}_3^{(j)}$, che sono pari a 1. Poiché:

$$\mathrm{I}_3^{(2)} s + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3^{(1)}) u \in \mathbf{K} ,$$

si ha:

$$0 \geq (s - \mathrm{I}_3 u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{+} = [\mathrm{I}_3^{(1)} (s - u)]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_3^{(1)} (\mathrm{A}u - f)^{+} +$$
$$+ [\mathrm{I}_3^{(2)} (s - u)]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_3^{(2)} (\mathrm{A}u - f)^{+} = [\mathrm{I}_3^{(2)} (s - u)]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_3^{(2)} (\mathrm{A}u - f)^{+} =$$
$$= [\mathrm{I}_3^{(2)} (s - u)]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_3^{(2)} (\mathrm{A}u - f) = (\mathrm{I}_3^{(2)} s - \mathrm{I}_3^{(2)} u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f) \geq 0 ;$$

sicché:

$$(s - \mathrm{I}_3 u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{+} = 0 . \tag{3}$$

Con ragionamento analogo, osservato che:

$$\mathrm{I}_3^{(4)} \mathrm{S} + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3^{(3)}) u \in \mathbf{K} ,$$

si ottiene:

$$(\mathrm{S} - \mathrm{I}_3 u)^{\mathrm{T}} (\mathrm{A}u - f)^{-} = 0 . \tag{4}$$

Inoltre, tenendo conto della seconda delle (1), già acquisita, e del fatto che:

$$\Sigma + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3) u \in \mathbf{K} ,$$

si ha:

$$0 \geq (\Sigma - I_2 u)^T I_2 (Au - f) = (\Sigma - I_2 u)^T (Au - f) \geq 0 ;$$

sicché :

$$(5) \qquad (\Sigma - I_2 u)^T (Au - f) = 0 .$$

Da (3), (4) e (5) segue la terza delle (1).

Abbiamo così dimostrato che il problema (P) equivale alla (2).

Ne segue [4] l'asserto, non appena si osservi che, per $\alpha = \min_{\|v\|_{R^n}=1} v^T Av$:

$$v^T Av \geq \alpha \| v \|^2_{R^n} \qquad \forall v \in R^n .$$

Osservazione. In base al Teorema 1 il problema (P) equivale anche [4] alla ricerca del minimo su $\mathbf{K}$ del funzionale:

$$(6) \qquad F(v) = \tfrac{1}{2} v^T Av - v^T f \qquad \forall v \in R^n$$

nonchè al problema:

$$u \in \mathbf{K} : w^T (Au - f) \geq 0 \qquad \forall w \in \overline{\mathbf{K}}_u ,$$

dove:

$$\mathbf{K}_u = \{\varepsilon (v - u) \in R^n \mid \varepsilon > 0 \quad e \quad v \in \mathbf{K}\} .$$

Inoltre si dimostra facilmente che il problema (P) equivale al seguente problema di complementarità lineare:

Trovare $(u , R , r) \in \mathbf{K} \times R^n \times R^n$ *tale che:*

$$(7) \qquad \begin{cases} Au - R + r = f \,, \; R \geq 0 \,, \; r \geq 0 \,, \; I_1 r = 0 \,, \; I_1 R = 0 \,, \; I_2 R = 0 \,, \\ (\Sigma - I_2 u)^T r + (S - I_3 u)^T r + (I_3 u - s)^T R = 0 . \end{cases}$$

Allo scopo di studiare la dipendenza dai dati della soluzione del problema (P), denotiamo ora, per ogni $A \in M_n^+$, $f \in R^n$, $\Sigma \in R_2^n$, $s \in R_3^n$ e $S \in R_3^n$ $(s \leq S)$, con $u(A , f , \Sigma , s , S)$ la soluzione del problema (P). Vale il seguente

TEOREMA 2. *L'applicazione*:

$$(A , f , \Sigma , s , S) \in M_n^+ \times R^n \times R_2^n \times R_3^n \times R_3^n \rightarrow u(A , f , \Sigma , s , S) \quad (s \leq S)$$

continua.

Dimostrazione. Siano, infatti, $(A , f , \Sigma , s , S) \in M_n^+ \times R^n \times R_2^n \times R_3^n \times R_3^n$ $(s \leq S)$ e $\{(A^{(m)}, f^{(m)} , \Sigma^{(m)}, s^{(m)}, S^{(m)}) \; (s^{(m)} \leq S^{(m)})\}$ una successione di elementi di $M_n^+ \times R^n \times R_2^n \times R_3^n \times R_3^n$ tali che:

$$\lim \| A^{(m)} - A \|_{M_n} = 0 \quad , \quad \lim \| f^{(m)} - f \|_{R^n} = 0 ,$$

$$\lim \| \Sigma^{(m)} - \Sigma \|_{R^n} = 0 \quad , \quad \lim \| s^{(m)} - s \|_{R^n} = 0 ,$$

$$\lim \| S^{(m)} - S \|_{R^n} = 0 .$$

Poniamo:

$$u = u(A, f, \Sigma, s, S) \quad , \quad \alpha = \min_{\|v\|_{R^n}=1} v^T A v \quad \text{e,} \quad \forall m \in N ,$$

$$u_m = u(A^{(m)}, f^{(m)}, \Sigma^{(m)}, s^{(m)}, S^{(m)}) \quad , \quad \alpha_m = \min_{\|v\|_{R^n}=1} v^T A^{(m)} v .$$

Evidentemente esistono un $\nu \in N$ ed una successione $\{\alpha_{m_k}\}$ estratta dalla $\{\alpha_m\}$ tali che:

$$\forall k > \nu \qquad \alpha_{m_k} > \frac{\alpha}{2} .$$

Pertanto, detta $\{w_m\}$ una successione limitata di vettori di R^n soddisfacente la condizione:

$$\forall m \in N \qquad I_2 w_m \leq \Sigma^{(m)} \quad , \quad s^{(m)} \leq I_3 w_m \leq S^{(m)} ,$$

risulta:

$$\begin{aligned} \forall k > \nu \qquad \alpha/2 \| u_{m_k} \|_{R^n}^2 &\leq u_{m_k}^T A^{(m_k)} u_{m_k} = (u_{m_k} - w_{m_k})^T A^{(m_k)} u_{m_k} + \\ &+ w_{m_k}^T A^{(m_k)} u_{m_k} \leq (u_{m_k} - w_{m_k})^T f^{(m_k)} + w_{m_k}^T A^{(m_k)} u_{m_k} \leq \\ &\leq \| u_{m_k} \|_{R^n} \cdot \| f^{(m_k)} \|_{R^n} + \| w_{m_k} \|_{R^n} \cdot \| f^{(m_k)} \|_{R^n} + \\ &+ \| w_{m_k} \|_{R^n} \cdot \| A^{(m_k)} \|_{M_n} \cdot \| u_{m_k} \|_{R^n} . \end{aligned}$$

Tale disuguaglianza implica che $\{u_{m_k}\}$ è limitata. Esiste quindi una sua estratta, che denotiamo con lo stesso simbolo, convergente. Posto $\tilde{u} = \lim u_{m_k}$, è ovvio che $\tilde{u} \in \mathbf{K}$ e soddisfa le (1).

Prendiamo ora in esame il caso in cui il vettore dei carichi f dipende linearmente da un parametro, è cioè del tipo:

$$f = f_0 + \lambda f_1 , \qquad \text{dove} \quad f_0 \in R^n,\ f_1 \in R^n,\ \lambda \in R$$

ed indichiamo, per ogni $\lambda \in R$, con $u(\lambda)$ la corrispondente soluzione del problema (P).

TEOREMA 3. *La funzione* $u(\lambda)$ *è continua e generalmente lineare in* R [3].

Dimostrazione. La continuità di $u(\lambda)$ consegue dal Teorema 2. Per ogni $\lambda \in \mathrm{R}$ poniamo:

$$E_2^{(2,\lambda)} = \{i \in E_2 \mid (Au(\lambda) - f)_i < 0\},$$
$$E_3^{(2,\lambda)} = \{i \in E_3 \mid (Au(\lambda) - f)_i^- < 0\},$$
$$E_3^{(4,\lambda)} = \{i \in E_3 \mid (Au(\lambda) - f)_i^+ > 0\},$$

e consideriamo la terna:

$$Ju(\lambda) = (E_2^{(2,\lambda)}, E_3^{(2,\lambda)}, E_3^{(4,\lambda)}).$$

Mostriamo che:

a) Se λ' *e* λ'' *sono numeri reali, con* $\lambda' < \lambda''$, *tali che* $Ju(\lambda') = Ju(\lambda'')$, *allora:*

$$u(\lambda) = u(\lambda') \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} + u(\lambda'') \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''] \tag{8}$$

$$Ju(\lambda) = Ju(\lambda') \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''] . \tag{9}$$

Verifichiamo la (8). Posto:

$$v(\lambda) = u(\lambda') \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} + u(\lambda'') \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} \qquad \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''],$$

è palese che:

$$v(\lambda) \in \mathbf{K} \quad , \quad I_1(Av(\lambda) - f) = 0 \quad , \quad I_2(Av(\lambda) - f) \leq 0 .$$

Si ha poi:

$$(\Sigma - I_2 v(\lambda))^T (Av(\lambda) - f) + (S - I_3 v(\lambda))^T (Av(\lambda) - f)^- + (s - I_3 v(\lambda))^T \cdot$$
$$\cdot (Av(\lambda) - f)^+ = \left[I_2 \left(\frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} (\Sigma - u(\lambda')) + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} (\Sigma - u(\lambda'')) \right) \right]^T \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} (Au(\lambda') - (f_0 + \lambda' f_1)) + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} (Au(\lambda'') - (f_0 + \lambda'' f_1)) \right) +$$
$$+ \left[I_3 \left(\frac{\lambda - \lambda''}{\lambda' - \lambda''} (S - u(\lambda')) + \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} (S - u(\lambda'')) \right) \right]^T \cdot$$

(3) Nel senso che esiste una partizione finita di R costituita da intervalli:

$$\{B_1, \cdots, B_m\}$$

tale che, $\forall r \in \{1, \cdots, m\}$, le componenti della restrizione di $u(\lambda)$ a B_r sono polinomi al più di primo grado.

$$\cdot\left(\frac{\lambda-\lambda''}{\lambda'-\lambda''}(\mathrm{A}u(\lambda')-(f_0+\lambda' f_1))+\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda''-\lambda'}(\mathrm{A}u(\lambda'')-(f_0+\lambda'' f_1))\right)^{-}+$$

$$+\left[\mathrm{I}_3\left(\frac{\lambda-\lambda''}{\lambda'-\lambda''}(s-u(\lambda'))+\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda''-\lambda'}(s-u(\lambda''))\right)\right]^{\mathrm{T}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda-\lambda''}{\lambda'-\lambda''}(\mathrm{A}u(\lambda')-(f_0+\lambda' f_1))+\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda''-\lambda'}(\mathrm{A}u(\lambda'')-(f_0+\lambda'' f_1))\right)^{+}=0\,.$$

La (9) è ovvia. Acquisita la *a*), per ogni terna:

$$\mathrm{J}=(\mathrm{J}_1\,,\,\mathrm{J}_2\,,\,\mathrm{J}_3)\,,\quad \text{dove}\quad \mathrm{J}_1\subseteq \mathrm{E}_2\,,\ \mathrm{J}_2\subseteq \mathrm{E}_3\,,\ \mathrm{J}_3\subseteq \mathrm{E}_3\quad \text{e}\quad \mathrm{J}_2\cap \mathrm{J}_3=\varnothing\,,$$

poniamo:

$$\Lambda_{\mathrm{J}}=\{\lambda\in \mathrm{R}\mid \mathrm{J}u(\lambda)=\mathrm{J}\}\,.$$

Consideriamo quindi la famiglia (finita e non vuota) $\mathscr{F}$ delle terne J tali che $\Lambda_{\mathrm{J}}\neq\varnothing$. In virtù della *a*) l'insieme:

$$\{\Lambda_{\mathrm{J}}\mid \mathrm{J}\in\mathscr{F}\}$$

è una partizione finita di R costituita da intervalli. Inoltre la restrizione di $u(\lambda)$ a Λ_{J} ha componenti che sono polinomi al più di primo grado.

Infine, per quanto riguarda il calcolo della soluzione del problema (P), consideriamo innanzitutto che alcune indicazioni si traggono dalla formulazione equivalente (6), che consente di applicare numerosi noti procedimenti di programmazione quadratica, e (7), alla quale possono venire adattate alcune tecniche di complementarità lineare. Tuttavia, la particolare semplicità del convesso **K** rende utile la proposta di un procedimento risolutivo specifico per il problema e che goda del pregio della semplicità.

Consideriamo perciò l'algoritmo:

$$\begin{cases} \delta_i^{k+1}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(f_i-\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,u_j^{k+1}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\,u_j^{k}\right)\\ u_i^{k+1}=\mathrm{P}_i\,(u_i^k+\delta_i^{k+1}) \end{cases}$$

dove:

$$\mathrm{P}_i\,(u_i^k+\delta_i^{k+1})=\begin{cases} u_i^k+\delta_i^{k+1}\,, & \text{se } i\in \mathrm{E}_1\\ \min\{u_i^k+\delta_i^{k+1},\,\Sigma_i\}\,, & \text{se } i\in \mathrm{E}_2\\ \max\{s_i\,,\,\min\{u_i^k+\delta_i^{k+1},\,\mathrm{S}_i\}\}\,, & \text{se } i\in \mathrm{E}_3\,. \end{cases}$$

TEOREMA 4. *La successione* $\{u^k\}$ *converge verso la soluzione* u *del problema* (P).

Dimostrazione. Posto, per ogni $k\in \mathrm{N}$:

$$u^{k+1,0}=u^k=u^{k,n}\ \text{e, per}\ i\in\{1,\cdots,n\}\,,\quad u^{k+1,i}=(u_1^{k+1},\cdots,u_i^{k+1},u_{i+1}^k,\cdots,u_n^k)$$

si ha:

$$\begin{aligned} F(u^{k+1,i}) - F(u^{k+1,i-1}) &= \tfrac{1}{2}(u^{k+1,i} - u^{k+1,i-1})^T A (u^{k+1,i} - u^{k+1,i-1}) + \\ &+ (u^{k+1,i} - u^{k+1,i-1})^T (A u^{k+1,i-1} - f) = \tfrac{1}{2} a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k)^2 + \\ &+ (u_i^{k+1} - u_i^k) \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} u_j^k - f_i \right) = \\ &= \tfrac{1}{2} a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k)^2 - a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k) \delta_i^{k+1} = - \tfrac{1}{2} a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k)^2 + \\ &+ a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k) [P_i (u_i^k + \delta_i^{k+1}) - (u_i^k + \delta_i^{k+1})] \leq - \tfrac{1}{2} a_{ii} (u_i^{k+1} - u_i^k)^2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$F(u^k) - F(u^{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(u^{k+1,i-1}) - F(u^{k+1,i})) \geq \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_i^{k+1} - u_i^k)^2 \tag{10}$$

essendo $a = \min a_{ii}$.

Dalla (10), tenuto conto che $F(u) \leq F(u^k)$ $\forall k \in N$, si trae che $\{F(u^k)\}$ è convergente, e di conseguenza:

$$\lim \| u^{k+1} - u^k \|_{R^n} = 0 \tag{11}$$

$$\{u^k\} \text{ è limitata}. \tag{12}$$

Osserviamo ora che, per $\alpha = \min\limits_{\|v\|_{R^n}=1} v^T A v$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} (u^{k+1}) - \frac{\partial F}{\partial v_i} (u) \right) (u_i^{k+1} - u_i) \geq \alpha \| u^{k+1} - u \|_{R^n}^2 ;$$

pertanto, essendo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial v_i} (u) (u_i^{k+1} - u_i) \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial v_i} (u^{k+1,i}) (u_i^{k+1} - u_i) \leq 0 ,$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} (u^{k+1}) - \frac{\partial F}{\partial v_i} (u^{k+1,i}) \right) (u_i^{k+1} - u_i) \geq \alpha \| u^{k+1} - u \|_{R^n}^2$$

e di qui l'asserto, in virtù di (11) e (12).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. BROWDER (1966) – *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces*, Proc. N.A.S., 56, 419–425.

[2] R. W. COTTLE (1977) – *Numerical methods for complementarity problems in engineering and applied science*, Technical Report SOL 77–24, Department of Operations Research, Stanford University.

[3] R. GLOWINSKI, J. L. LIONS and R. TREMOLIERES (1976) – *Analyse numerique des inequations variationnelles*, Dunod.

[4] G. STAMPACCHIA (1969) – *Variational inequalities*, Pubbl. IAC, s. III, n. 25, Roma.