Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Maurizio Chicco

## Su una classe di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **66** (1979), n.3, p. 201–203.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_3_201_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

**Equazioni a derivate parziali.** — *Su una classe di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui* (*). Nota di MAURIZIO CHICCO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — In this note I consider a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients and prove some results concerning the Dirichlet problem for such equations.

## 1. INTRODUZIONE

Particolari classi di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche, lineari, del secondo ordine, in forma non variabile e a coefficienti discontinui, sono state oggetto di studio da parte di molti autori (vedi ad esempio [1], [4], [7], [10], [13], [14], [15], [17]).

Scopo della presente Nota è di riprendere una di tali classi (gia considerata in [7], [17], [5]) ed estenderla opportunamente in modo da contenere in essa anche le equazioni studiate da Sharovskii in [15]. In tal modo si deduce per esse un teorema di esistenza ed unicità relativamente al problema di Dirichlet.

Ringrazio il prof. Giorgio Talenti i cui suggerimenti sono stati utili alla redazione della presente Nota.

## 2. NOTAZIONI ED IPOTESI

Sia $\Omega$ un aperto limitato di $R^n$ $(n \geq 3)$ e $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe $C^2$. Siano $H^{1,p}(\Omega)$, $H_0^{1,p}(\Omega)$ gli spazi di Banach (sui reali) ottenuti completando rispettivamente $C^1(\overline{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L_p(\Omega)} .$$

Sia $H^{2,p}(\Omega)$ lo spazio di Banach (sui reali) ottenuto completando $C^2(\overline{\Omega})$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^{2,p}(\Omega)} = \| u \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \| u_{x_i x_j} \|_{L_p(\Omega)} .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Laboratorio per la Matematica applicata » e del GNAFA del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1979.

Si scriverà per brevità $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ rispettivamente in luogo di $H^{1,2}(\Omega)$, $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{2,2}(\Omega)$.

Siano $a_{ij}$, $b_i$, $c$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ funzioni definite in $\Omega$, ivi limitate e misurabili; sia $a_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ quasi ovunque in $\Omega$ e si ponga

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c .$$

## 3. Risultato

Teorema. *Oltre alle ipotesi elencate in precedenza, supponiamo che esista una costante positiva* $a_0$ *tale che* $\Sigma a_{ij} t_i t_j \geq a_0 |t|^2$ *in* $\Omega$ *per ogni* $t \in R^n$, *e che* $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ *per* $i, j = 1, 2, \cdots, n-1$. *Allora*:

(i) *esistono due costanti* K, $\lambda_0$ (*dipendenti dai coefficienti di* L, *da* $n$ *e da* $\Omega$) *tali che risulti*

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K \| Lu + \lambda u \|_{L_2(\Omega)} \tag{2}$$

*per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *e per ogni* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$;

(ii) *per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *e per ogni* $f \in L_2(\Omega)$ *il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega , \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3}$$

*ammette una ed una sola soluzione*;

iii) *se* $c \geq 0$ *q.o. in* $\Omega$, *le* (i), (ii) *valgono non appena* $\lambda \geq 0$;

(iv) *se* $c \geq 0$, $f \geq 0$ *q.o. in* $\Omega$, $\lambda \geq 0$, *la soluzione* $u$ *del problema* (3) *è* $\geq 0$ *q.o. in* $\Omega$;

(v) *se* $f \in L_p(\Omega)$ *con* $p > 2n/3$, *la soluzione* $u$ *del problema* (3) *è hölderiana in* $\overline{\Omega}$.

L'operatore L colle ipotesi del teorema precedente è già stato considerato da Sharovskii in [15], che ha provato una diseguaglianza del tipo

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K_1 \{ \| Lu \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)} \}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

La dimostrazione del teorema precedente si fonda sulla verifica che, localmente e a meno di opportuni cambiamenti di variabili, l'equazione considerata è « di tipo Cordes ». Si applicano poi i risultati di [5], [7]. Il dattiloscritto contenente la dimostrazione completa sarà inviato a chi ne farà richiesta.

## BIBLIOGRAFIA


[1] S. CAMPANATO (1967) – *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa» (3) *21*, 701–707.

[2] M. CHICCO (1971) – *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$, «Boll. Un. Mat. Ital.» (4) *4*, 668–676.

[3] M. CHICCO (1971) – *Solvability of the Dirichlet problem in* $H^{2,p}(\Omega)$ *for a class of linear second order elliptic partial differential equations*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (4) *4*, 374–387.

[4] M. CHICCO (1972) – *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4) *92*, 13–23.

[5] M. CHICCO (1974) – *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4) *100*, 239–258.

[6] M. CHICCO (1977) – *Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4) *112*, 241–259.

[7] H. O. CORDES (1961) – *Zero order a priori estimates for soluzions of elliptic differential equations*, «Proc. Symp. Pure Math.» *4*, 157–166.

[8] E. GAGLIARDO (1958) – *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, «Ricerche Mat.», *7*, 102–137.

[9] P. GRISVARD (1975) – *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa» (4) *2*, 359–388.

[10] V. IFTIMIE (1968) – *Sur le problème de Dirichlet pour les équations aux coefficients mesurables*, «Rev. Roumaine Math. Pures Appl.», *13*, 1353–1360.

[11] J. KADLEC (1963) – *Sulla regolarità della soluzione del problema di Poisson in una regione il cui bordo è simile a quello di un cubo (in russo)*, «Czechoslovak Math. J.», *13* (88), 599–611.

[12] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. F. WEINBERGER (1963) – *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa» (3) *17*, 43–77.

[13] C. MIRANDA (1963) – *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4) *63*, 353–386.

[14] C. MIRANDA (1965) – *Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui*, «An. Sti. Univ. 'Al. Cuza' Jasi Sect. I A Mat.» (N.S.) *11 B*, 209–215.

[15] A. A. SHAROVSKII (1969) – *On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients*, «Moscow Univ. Math. Bull.», *24*, 47–50 (1971).

[16] G. STAMPACCHIA (1965) – *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, «Ann. Inst. Fourier (Grenoble)», *15*, 1, 189–258.

[17] G. TALENTI (1965) – *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4) *69*, 285–304.