Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Cassa, Luisella Verdi

Un procedimento induttivo per esprimere ogni insieme algebrico in C^n come intersezione di n ipersuperfici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.3, p. 186–188.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_3_186_0>

Geometria. — *Un procedimento induttivo per esprimere ogni insieme algebrico in* $\mathbf{C}^n$ *come intersezione di* n *ipersuperfici* (*). Nota di ANTONIO CASSA e LUISELLA VERDI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we give an inductive procedure in order to describe every algebraic set in $\mathbf{C}^n$ as the intersection of n hypersurfaces; this is obtained by taking into account a paper of Eisenbud and Evans.

INTRODUZIONE

La presente Nota si ispira ad un articolo di Eisenbud e Evans (cfr. [1]) che prova che ogni sottoinsieme algebrico dello spazio affine o proiettivo di dimensione n è esprimibile come intersezione di non più di n ipersuperfici. Quell'articolo costituiva un elegante paragrafo di uno studio più vasto e sistematico sul numero minimo di elementi sufficienti a generare un ideale in un anello noetheriano e pertanto non si soffermava ad evidenziare il significato «geometrico» delle dimostrazioni fornite. Tale significato è ben presente agli autori che rinviano a questo proposito ad un articolo di Kneser [2] che tratta il caso particolare delle curve. Ci è parso opportuno mettere in evidenza il contenuto geometrico dell'articolo di Eisenbud e Evans in ogni dimensione. Abbiamo trattato solo il caso affine perché l'idea geometrica che porta all'analogo risultato in $\mathbf{P}^n$ è la stessa.

TEOREMA. *Sia* X′ *un sottoinsieme algebrico affine di dimensione pura* $n-1$. *Ogni sottoinsieme algebrico* Y *di* $X = X' \times \mathbf{C}$ *è il luogo degli zeri comuni di* n *funzioni regolari.*

Dimostrazione. Facciamo innanzitutto alcune osservazioni.

Siano $X'_1, \cdots, X'_k$ le componenti irriducibili di X′. Poniamo: $U = \{u \in R_{X'} :$ u è una funzione regolare non identicamente nulla su ciascuna delle componenti irriducibili di $X'\}$. Consideriamo la localizzazione $(R_{X'})_U$ dell'anello delle funzioni regolari di X′ rispetto all'insieme moltiplicativamente chiuso U. Si sa che c'è un isomorfismo:

$$(R_{X'})_U \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{C}(X'_i) . \tag{1}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1979.

Poiché $X = X' \times \mathbf{C}$ ed X' sono affini, risulta:

$$R_X \simeq R_{X'}[t]$$

e quindi

$$(R_X)_U \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{C}(X'_i)[t] \tag{2}$$

cioè $(R_X)_U$ è un P.I.R. (= anello ad ideali principali) in quanto somma di P.I.D. (= dominio ad ideali principali) (cfr. [3], vol. 1, p. 245).

Per dimostrare il teorema procediamo per induzione su $n \geq 1$, (dove $\dim X = n$).

Se $n = 1$, $\dim X' = 0$ e quindi X' è un insieme finito di punti, X è un insieme finito di rette e l'asserto è vero banalmente.

Sia $n \geq 2$. Indichiamo con $I(Y)_U$ il localizzato di $I(Y)$ in $(R_X)_U$. Poiché $(R_X)_U$ è un P.I.R. esiste un elemento $\frac{g_1}{u_1}$ di $I(Y)_U$ tale che $\left(\frac{g_1}{u_1}\right) = I(Y)_U$.

Sia $I(Y)=(f_1, \cdots, f_s)$ in R_X, per ogni $i = 1, \cdots, s$ esiste $\frac{h_i}{v_i} \in (R_X)_U$ tali che:

$$f_i = \frac{g_1}{u_1} \cdot \frac{h_i}{v_i}$$

e indicando con u il m.c.m. di $(u_1 v_1, \cdots, u_1 v_s)$, otteniamo che per ogni f di $I(Y)$ vale:

$$u \cdot f = g_1 \cdot k$$

con $k \in R_X$, cioè

$$u \cdot I(Y) \subset (g_1). \tag{3}$$

Indichiamo con

$$Z = \{x' \in X' : u(x') = 0\}$$

$$H = \{x \in X : g_1(x) = 0\}.$$

Dalla (3) otteniamo

$$Y \cup (Z \times \mathbf{C}) \supset H \supset Y.$$

Poniamo

$$Y^* = Y \cap (Z \times \mathbf{C}).$$

Poiché $\dim Z = n - 2$ possiamo applicare l'induzione ad Y^*. Esistono quindi $n - 1$ funzioni regolari $g_2^*, \cdots, g_n^*$ di $R_{Z \times \mathbf{C}}$ tali che

$$Y^* = \{x \in Z \times \mathbf{C} : g_2^*(x) = 0 \cdots g_n^*(x) = 0\}.$$

Ma $I(Y^*) = I(Y \cap (Z \times \mathbf{C})) = \sqrt{I(Y) + I(Z \times \mathbf{C})}$ e quindi esiste un intero positivo r tale che:

$$g_k^{*r} \in I(Y) + I(Z \times \mathbf{C}) \qquad \text{con} \quad k = 2, \cdots, n$$

cioè

$$g_k^{*r} = g_k + l_k \qquad \text{con} \quad g_k \in I(Y) \qquad \text{e} \quad l_k \in I(Z \times \mathbf{C}) .$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Y^* &= \{x \in Z \times \mathbf{C} : g_k^*(x) = 0 \qquad k = 2, \cdots, n\} = \\ &= \{x \in Z \times \mathbf{C} : g_k^{*r}(x) = 0 \qquad k = 2, \cdots, n\} = \\ &= \{x \in Z \times \mathbf{C} : g_k(x) + l_k(x) = 0 \qquad k = 2, \cdots, n\} . \end{aligned}$$

Ma $l_k(x)\,|_{Z \times \mathbf{C}} = 0$, quindi:

$$Y^* = \{x \in Z \times \mathbf{C} : g_k(x) = 0 \qquad k = 2, \cdots, n\} ;$$

cioè

$$Y^* = \{x \in X : g_k(x) = 0 \qquad k = 2, \cdots, n\} \cap (Z \times \mathbf{C}) .$$

Verifichiamo che $Y = V(g_1, g_2, \cdots, g_n)$. Poiché $g_1, g_2, \cdots, g_n \in I(Y)$ è evidente l'inclusione $Y \subset V(g_1, \cdots, g_n)$. Inoltre se $x \in V(g_1, \cdots, g_n)$ si ha $g_1(x) = 0$ quindi $x \in H$ e allora $x \in (Z \times \mathbf{C}) \cup Y$; anche se $x \in (Z \times \mathbf{C})$, poiché $g_2(x) = 0, \cdots, g_n(x) = 0$, si ha che $x \in Y^*$ e quindi $x \in Y$.

COROLLARIO. *Ogni sottoinsieme algebrico di $\mathbf{C}^n$ è definito dagli zeri di n polinomi.*

Dimostrazione. Basta prendere $X' = \mathbf{C}^{n-1}$ nel teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. EISENBUD and E. G. EVANS (1973) - *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces.* « Inv. Math. », *19*, 107-112.

[2] M. KNESER (1960) - *Über die Dzrstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen.* « Arch. Math. », *11*, 157-158.

[3] O. ZARISKI and P. SAMUEL (1958) - *Commutative algebra*, Univer. Series in Higher Math. », vol 1°.