ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANNA MARIA PAGLIUCA RAUGEI, SANDRA TUCCI
SCARSELLI

Sui gruppi Z-sequenziabili

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 66 (1979), n.2, p. 97–102.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_2_97_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 febbraio 1979

Presiede il Presidente della Classe ANTONIO CARRELLI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sui gruppi Z-sequenziabili.* Nota di ANNA MARIA PAGLIUCA RAUGEI e SANDRA TUCCI SCARSELLI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — A finite group is called Z-sequenceable if its non-identity elements can be listed $x_1, x_2, \dots, x_n$ so that $x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$. Various conditions are determined for a group G to be Z-sequenceable. Moreover several well known classes of groups which satisfy such conditions are found out.

Un grafo non orientato $\mathcal{G}$ è una coppia costituita da un insieme G e da una relazione simmetrica ρ di G in sè. Gli elementi di G si dicono vertici e due vertici si dicono adiacenti (o collegati da uno spigolo) se sono in relazione ρ . Un cammino in $\mathcal{G}$ da « a » a « b » è una sequenza $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ di punti di G tali che valga $x_i \rho x_{i+1}$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$. Se G è un gruppo e si considera la relazione ρ così definita: $\forall x, y \in G \text{ è } x\rho y \iff xy = yx$, la coppia (G, ρ) costituisce un grafo non orientato $\Gamma(G)$.

Sullo studio di $\Gamma(G)$ vi sono vari lavori fra cui i seguenti: Nakanishi ([4]) considera classi di gruppi per cui $\Gamma(G)$ è connesso (cioè tale che per ogni coppia di vertici di $\Gamma(G)$ esista almeno un cammino che li colleghi) e prova che $\Gamma(S_n)$ per $n \geq 3$ è connesso se e solo se n e $n-1$ sono primi. Gordon ([3]) e Friedlander ([1]), studiano problemi sui quadrati latini, trovano sequenze di gruppi che possono essere interpretate come communi Hamiltoniani (cioè passanti una sola volta per ogni vertice del cammino stesso). Se il gruppo G è finito o numerabile, l'esistenza di un cammino Hamiltoniano

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1979.

in $\Gamma(G)$ è equivalente all'esistenza di una sequenza $\{x_i\}$ di elementi di G diversi dall'identità tali che $x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$. G si dice fortemente Z -sequenziabile se in $\Gamma(G)$ esiste un circuito Hamiltoniano che passi per tutti gli elementi di G .

Miller e Friedlander ([1]) determinano varie condizioni su G in modo che $\Gamma(G)$ possieda cammini e circuiti di Hamilton e di Eulero (che percorrono cioè una sola volta ogni spigolo). In particolare provano la non Z -sequenziabilità di S_n per $n \geq 3$ e di A_n per $n \geq 4$ e dimostrano il seguente teorema « Se $|G/Z(G)| \leq |Z(G)|$ allora G è fortemente Z -sequenziabile, mentre se $(|G/Z(G)| - 1) \leq |Z(G)|$, G è Z -sequenziabile ». La condizione di Miller e Friedlander non è comunque necessaria, come si vede considerando $S_3 \times Z_4$.

Nel nostro lavoro troviamo varie condizioni necessarie e sufficienti per la Z -sequenziabilità dei gruppi finiti, che estendono i risultati esistenti. Tali condizioni risultano verificate da vaste classi di gruppi.

In tutto il lavoro con gruppo intendiamo sempre un gruppo finito.

I.

DEFINIZIONE. Sia G un gruppo; un sottogruppo proprio H di G si dice un CC-sottogruppo di G se $\forall h \in H$ e $h \neq I$ è $C_G(h) \subseteq H$. Un CC-sottogruppo H di G si dice un CCT-sottogruppo se $\forall x \in G$, si ha $H^x \cap H = \langle 1 \rangle$ o $H^x \cap H = H$.

TEOREMA I. Se G è un gruppo che contiene un CC-sottogruppo H , allora G non è Z -sequenziabile.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che G sia Z -sequenziabile e sia σ una sua Z -sequenza. Sia h_1 il primo elemento del CC-sottogruppo H che compare in σ . Non essendo h_1 permutabile con nessun elemento di G che non sia in H , h_1 dovrà essere proprio il primo elemento di σ . Sia ora g il primo elemento di σ che non sia in H ; per definizione di Z -sequenza g dovrà essere permutabile con l'elemento $h_r \in H$ che lo precede in σ . Dunque $g \in C_G(h_r)$ e $g \notin H$ contro l'ipotesi che H sia un CC-sottogruppo di G .

COROLLARIO I.

a) I gruppi di Frobenius contengono CCT-sottogruppi e quindi non sono Z -sequenziabili.

b) I seguenti gruppi semplici, contengono CCT-sottogruppi, non sono Z -sequenziabili:

- 1) I gruppi semplici di Suzuki
- 2) A_n con $n = p$, $n = p + 1$ ovvero $n = p + 2$ con p primo
- 3) $PSL(p, q)$ con p, q primi
- 4) Tutti i gruppi sporadici al Luglio 1974

- 5) *I gruppi semplici elencati da Ree*
- 6) *I gruppi semplici di Lee tipo E_6, E_8, G_2, F_4 in caratteristica dispari*
- c) *I gruppi S_n con n o $n - 1$ primi contengono CC-sottogruppi e quindi non sono Z-sequenziabili.*

Dimostrazione. Il punto a) segue dalla definizione di gruppo di Frobenius. Il punto b) segue da ([5]). Per quanto riguarda c), sia n primo, allora S_n contiene la permutazione $(1, 2, \dots, n)$ che genera un sottogruppo ciclico di ordine primo, CC-sottogruppo di S_n . Se $n - 1$ è primo, il CC-sottogruppo di S_n è quello generato dalla permutazione $(1, 2, \dots, n - 1)$.

2.

TEOREMA 2. *Dato un gruppo G , sia n il numero minimo di sottogruppi abeliani massimali che lo esauriscono. Condizione sufficiente affinché G sia Z-sequenziabile è che $|Z(G)| \geq n$. Condizione sufficiente affinché G sia fortemente Z-sequenziabile è che $|Z(G)| > n$.*

Dimostrazione. Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ i sottogruppi abeliani massimali di G del Teorema e sia $m = |Z(G)| \geq n$. Poniamo

$$B_1 = A_1 - Z(G)$$

$$B_j = A_j - A_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right) \quad \text{per } j = 2, \dots, n.$$

Osserviamo che $\left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cup Z(G) = G$.

Una Z-sequenza di G si costruisce intercalando i blocchi di elementi di G appartenenti ai vari B_i con un elemento di $Z(G)$ diverso dalla identità. Ne segue che la Z-sequenza di G esiste quando $|Z(G)| \geq n$. Se $|Z(G)| > n$, allora G è fortemente Z-sequenziabile.

OSSERVAZIONE 1. Un gruppo finito può essere esaurito da un sottoinsieme proprio dell'insieme dei suoi sottogruppi abeliani massimali; per esempio in S_4 il sottogruppo abeliano massimale

$$H = \{(12)(34); (13)(24); (14)(23); 1\} \subset \bigcup_{i=1}^3 Q_i$$

ove i Q_i sono i sottogruppi abeliani massimali ciclici di ordine 4. Quindi H si può eliminare da una copertura di G , mediante abeliani massimali.

OSSERVAZIONE 2. La condizione del Teorema 2 è effettivamente solo sufficiente. Si hanno infatti esempi di gruppi Z-sequenziabili il cui centro ha ordine minore del numero minimo di abeliani massimali che esauriscono G .

Per esempio $S_4 \times Z_5$ (il cui centro è Z_5 e che è esaurito da un minimo di 10 sottogruppi massimali abeliani) è Z -sequenziabile pur non soddisfacendo le ipotesi del Teorema 2.

Il seguente corollario al Teorema 2 è utile quando si conosce la struttura di $G/Z(G)$.

COROLLARIO 2. *Condizione sufficiente affinché un gruppo G sia Z -sequenziabile è che $|Z(G)| \geq m$, ove m è il numero dei sottogruppi ciclici massimali di $G/Z(G)$. Se $|Z(G)| > m$, allora G è fortemente Z -sequenziabile.*

Dimostrazione. Siano $H_1/Z(G), H_2/Z(G), \dots, H_m/Z(G)$ i sottogruppi ciclici massimali di $G/Z(G)$; allora $\bigcup_{i=1}^m [H_i/Z(G)]$ copre $G/Z(G)$. Si ha che $\bigcup_{i=1}^m H_i$ copre G . Ciascun H_i , essendo abeliano, sarà contenuto in un sottogruppo abeliano massimale A_i , di G . Otteniamo così m' (con $m' \leq m$) sottogruppi $A_1, \dots, A_{m'}$, abeliani massimali che esauriscono G . Supponendo quindi $|Z(G)| \geq m$ ($|Z(G)| > m$) restano verificate le ipotesi del Teorema 2, per cui G risulta Z -sequenziabile (fortemente Z -sequenziabile).

Una condizione anche necessaria è data dal seguente

TEOREMA 3. *Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ tutti i sottogruppi abeliani massimali di un gruppo G . Se per ogni i, j con $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$ si ha $A_i \cap A_j = Z(G)$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché G sia Z -sequenziabile (fortemente Z -sequenziabile) è che $|Z(G)| \geq n$ ($|Z(G)| > n$).*

Dimostrazione. La condizione posta è sufficiente per il Teorema 2. Supponiamo che G sia Z -sequenziabile e proviamo che $|Z(G)| \geq n$. Notiamo che, nelle ipotesi di questo Teorema, non possono essere permutabili elementi appartenenti, rispettivamente, ad $A_i - Z(G)$ e $A_j - Z(G)$ per $i \neq j$; infatti, se esistessero $a_i \in A_i - Z(G)$ e $a_j \in A_j - Z(G)$ tali che $a_i a_j = a_j a_i$, il sottogruppo $\langle a_i, a_j \rangle$, essendo abeliano, sarebbe contenuto in un abeliano massimale A_k (con $k \neq i, j$) e quindi $A_i \cap A_k$ contenebbe il sottogruppo $\langle a_i \rangle$ con $a_i \notin Z(G)$, contro l'ipotesi.

Consideriamo ora una Z -sequenza di G , $\sigma \equiv a_1, a_2, \dots, a_m$. Sia a_i il primo elemento di G , tale che $a_i \notin Z(G)$; allora $a_i \in A_j - Z(G)$ per un j opportuno. Sia a_r il primo elemento di σ , successivo ad a_i , tale che $a_r \notin A_j - Z(G)$; deve allora essere necessariamente $a_r \in Z(G)$. Se a_s è il primo elemento di σ , successivo ad a_r , che non appartenga a $Z(G)$, allora $a_s \in A_k - Z(G)$ per un k opportuno. Così continuando si osserva che σ è costituita da blocchi di elementi di G , appartenenti ai vari $A_i - Z(G)$ intervallati da almeno un elemento di $Z(G)$. Ne segue che l'ordine minimo di $Z(G)$ necessario per poter costruire una Z -sequenza di G è proprio n .

DEFINIZIONE. *Si dice ceto di un gruppo G , il numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione così definita: $\forall a, b \in G$ è $a \sim b \iff C_G(a) = C_G(b)$. Tali classi si dicono sistemi fondamentali di G .*

COROLLARIO 3. *Sia G un gruppo di ceto 4, allora G è Z-sequenziabile (fortemente) se $|Z(G)| \geq 3$ ($|Z(G)| > 3$).*

Dimostrazione. In base al Teorema di Scorza ([6], Teor. V, 14,1) G viene ad essere esaurito da 3 sottogruppi abeliani massimali H_1, H_2, H_3 ove $H_1 \cap H_2 = H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_3 = Z(G)$ e $G/Z(G) \simeq Q$ ove Q è il gruppo quadrimo. Segue la tesi.

OSSERVAZIONE 3. Nelle ipotesi del Teorema 3, cioè quando $A_i \cap A_j = Z(G) \forall i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$, gli A_i risultano tutti essenziali per ottenere una copertura di G ; perciò, in questo caso, n coincide con il minimo numero di abeliani massimali che esauriscono G . Ne segue, per il Corollario 2, che, detto m il numero dei ciclici massimali di $G/Z(G)$, è $m \geq n$.

Esaminiamo il caso in cui $m = n$. Siano $A_1, \dots, A_n$ i sottogruppi abeliani massimali di G e $H_1/Z(G), \dots, H_n/Z(G)$ i sottogruppi ciclici massimali di $G/Z(G)$.

PROPOSIZIONE 1. *Se $A_i \cap A_j = Z(G) \forall i, j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$, allora $A_i/Z(G) = H_i/Z(G)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Evidentemente $A_1/Z(G), A_2/Z(G), \dots, A_n/Z(G)$ costituiscono una partizione di $G/Z(G)$. Inoltre ogni $A_i/Z(G)$ contiene almeno un sottogruppo ciclico massimale di $G/Z(G)$. Infatti supponiamo per assurdo che $A_i/Z(G)$ contenga un sottogruppo ciclico $\langle Z(G)g_i \rangle$ massimale di $A_i/Z(G)$ che non sia ciclico massimale in $G/Z(G)$. Allora $\langle Z(G)g_i \rangle$ sarà contenuto in un ciclico massimale di $G/Z(G)$ il cui generatore sia $\langle Z(G)g_j \rangle$. Sia H_j la retroimmagine di $\langle Z(G)g_j \rangle$ nell'omomorfismo naturale di G su $G/Z(G)$. H_j è abeliano ed è quindi contenuto in un abeliano massimale A_j per $j \neq i$, per cui si avrebbe $A_i \cap A_j \supset Z(G)$ contro l'ipotesi. D'altra parte i ciclici massimali di $G/Z(G)$ sono in numero uguale agli abeliani massimali di G , per ipotesi, dunque ogni $A_i/Z(G)$ contiene esattamente un ciclico massimale $H_i/Z(G)$ di $G/Z(G)$. Chiaramente se $A_i/Z(G) \cap A_j/Z(G) = \langle 1 \rangle$, è anche $H_i/Z(G) \cap H_j/Z(G) = \langle 1 \rangle$. Dunque gli $H_i/Z(G)$ danno una partizione di $G/Z(G)$. Segue che $G/Z(G) = \bigcup_{i=1}^n [H_i/Z(G)] \subseteq \bigcup_{i=1}^n [A_i/Z(G)] = G/Z(G)$. Onde $A_i/Z(G) = H_i/Z(G)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Si noti che, in questo caso, non sono permutabili due elementi $h_i \in H_i - Z(G)$ e $h_j \in H_j - Z(G)$.

Viceversa vale anche la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Se $\forall i, j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$, si ha $H_i/Z(G) \cap H_j/Z(G) = \langle 1 \rangle$, e inoltre, se comunque si scelgano $h_i \in H_i - Z(G)$ e $h_j \in H_j - Z(G)$, è sempre $h_i h_j \neq h_j h_i$, allora si ha $H_i = A_i$ per ogni i .*

DIMOSTRAZIONE. Gli $H_i/Z(G)$ costituiscono una partizione di $G/Z(G)$ in sottogruppi ciclici, dunque le retroimmagini H_i degli $H_i/Z(G)$ nell'omomorfismo naturale di G su $G/Z(G)$, sono n sottogruppi abeliani di G , tutti

necessari ad esaurirlo ed inoltre tali che $H_i \cap H_j = Z(G)$ per $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Se per un certo i , H_i non fosse un abeliano massimale di G , H_i sarebbe contenuto propriamente in un abeliano massimale A_i di G . Dunque esisterebbe un $x_j \in A_i$ e $x_j \notin H_i$ (e quindi $x_j \notin Z(G)$). Poichè gli H_i coprono tutto G , x_j dovrà appartenere ad un certo $H_j - Z(G)$ con $j \neq i$. Ma $A_i \cong \langle H_i, x_j \rangle$ onde $\langle H_i, x_j \rangle$ è abeliano, contro l'ipotesi che non sono permutabili elementi di $H_i - Z(G)$ e $H_j - Z(G)$ per $i \neq j$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. J. FRIEDLANDER (1976) - *Sequences in non-abelian groups with distinct partial products*; « Aequat. Mat. », 14, 59-66.
- [2] R. J. FRIEDLANDER e M. D. MILLER (1977) - *On some sequencing problems in finite groups*; « Discrete Math. », 19, 77-84.
- [3] B. GORDON (1961) - *Sequences in groups with distinct partial products*; « Pacific J. Math. », II, 1309-1313.
- [4] M. NAKANISHI (1967) - *On a kind of connectivity in finite groups*, « Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku », Sect. A9, 158-162.
- [5] J. S. WILLIAMS (1976) - *A Sufficient Condition on Centralizers for a Finite Group to Contain a Proper CCT-Subgroup*; « Journal of Algebra », 42, 549-556.
- [6] G. ZAPPA (1965) - *Fondamenti di Teoria dei Gruppi*; Roma.