
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CARLO BANFI, MAURO FABRIZIO

**Sul Concetto di Sottocorpo nella Meccanica dei
Continui**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 66 (1979), n.2, p. 136–142.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_2_136_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sul Concetto di Sottocorpo nella Meccanica dei Continui* (*). Nota di CARLO BANFI e MAURO FABRIZIO (**), presentata (***) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — A new definition of subbody is introduced on the basis of the concept of finite perimeter set. This definition allows to construct a correct "universe" such that for its elements the divergence theorem is valid.

1. INTRODUZIONE

In questa Nota prendiamo in considerazione due questioni riguardanti l'impostazione della meccanica e termodinamica dei continui. La prima è l'introduzione del concetto di *sottocorpo* e quindi di « universo materiale » come insieme di sottocorpi. Tale concetto è essenziale per dare alla meccanica e termodinamica dei continui una formulazione globale. Esso è stato introdotto da Noll in [1] e viene descritto anche da Gurtin e Williams in [2] e da Truesdell in [5]. La seconda è la cosiddetta « descrizione materiale » di un corpo continuo definita attraverso l'uso del concetto di varietà differenziabile. Lo sviluppo di tale descrizione, dovuto a Noll, è dato ad esempio in [4].

In questa Nota vogliamo introdurre una nuova più soddisfacente definizione di sottocorpo attraverso il concetto di *insieme di perimetro finito*. Tale concetto sviluppato nell'ambito della teoria geometrica della misura, soprattutto per opera di E. De Giorgi (si vedano [6] e [7]) non è ancora di uso corrente fra i cultori di fisica matematica sebbene sia stato utilizzato per affrontare problemi specifici come ad esempio nell'ambito dello studio della capillarità. Gli insiemi di perimetro finito si presentano come lo strumento più idoneo per affrontare la questione in oggetto; con la nuova definizione infatti si ottengono dei sottocorpi per cui vale, in senso generalizzato, il teorema della divergenza, nello stesso tempo costituiscono una classe chiusa rispetto all'intersezione contrariamente a quanto avviene per gli insiemi con bordo generalmente regolare ⁽¹⁾.

In relazione alla nuova definizione di sottocorpo viene ripresa la descrizione materiale del corpo continuo introducendo per gli spostamenti una

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Indirizzo degli autori: Istituto Matematico - Università di Ferrara.

(***) Nella seduta del 10 febbraio 1979.

(1) Come è stato messo in evidenza (vedi [5] cap. I § 3, esempio 3) l'intersezione tra due insiemi con bordo « regolare a tratti » non ha necessariamente un bordo « regolare a tratti ».

classe più generale che risulti più conveniente sia dal punto di vista degli sviluppi matematici che della aderenza fisica del modello.

Qui daremo solo alcuni cenni essenziali alla nuova impostazione, rimandando a successivi lavori tutti gli sviluppi che si possono trarre.

2. LOCALIZZAZIONI ⁽²⁾ E SPOSTAMENTI DI UN CORPO

Intenderemo per *corpo continuo* $\mathbf{B}$ un insieme di elementi $X, Y, \dots$, detti *punti materiali*, dotato di una struttura determinata da una classe Φ di applicazioni:

$$\varphi: \mathbf{B} \rightarrow \mathcal{E},$$

dove $\mathcal{E}$ è uno spazio euclideo affine tridimensionale di elementi $x, y, \dots$ che diremo *punti spaziali*. Chiameremo le applicazioni φ *localizzazioni* di $\mathbf{B}$, esse determinano le possibili collocazioni del corpo nello spazio $\mathcal{E}$. Una localizzazione assegna ad ogni punto materiale $X \in \mathbf{B}$ un punto geometrico $x = \varphi(X)$ in $\mathcal{E}$. Se indichiamo con $\varphi(\mathbf{B})$ l'insieme occupato da $\mathbf{B}$ in $\mathcal{E}$ per la localizzazione φ avverrà che gli spostamenti dei punti del corpo $\mathbf{B}$ nello spazio sono determinati dal passaggio in $\mathcal{E}$ tra due diverse localizzazioni.

Caratterizziamo la classe delle localizzazioni Φ relativa a $\mathbf{B}$ nel seguente modo:

i) ogni $\varphi \in \Phi$ sia iniettiva e $\varphi(\mathbf{B})$ sia aperto in $\mathcal{E}$ secondo la usuale topologia dello spazio euclideo;

ii) se $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, la trasformazione

$$\gamma = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(\mathbf{B}) \rightarrow \varphi_2(\mathbf{B})$$

sia bilipschitziana e il suo jacobiano $\Delta(\varphi_2 \circ \varphi_1) > 0$ q.d.

iii) se $\varphi \in \Phi$ e $\lambda: \varphi(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ è una trasformazione bilipschitziana allora si abbia $\lambda \circ \varphi \in \Phi$.

Attraverso la caratterizzazione data per Φ si è implicitamente assegnata la classe degli spostamenti tra diverse localizzazioni del corpo come quella delle funzioni bilipschitziane. Tale scelta costituisce, rispetto alla classe delle funzioni differenziabili, una generalizzazione che sembra meglio aderire alle situazioni fisiche, in quanto gli spostamenti non sempre risultano essere perfettamente « lisci », basti pensare al processo fisico di esperienza comune del piegamento di una sbarra in un punto.

La classe delle localizzazioni che abbiamo introdotto sopra non permette di dare a $\mathbf{B}$ un'unica struttura di varietà differenziabile così come viene fatto

(2) Useremo l'espressione « localizzazione » per tradurre ciò che Noll e altri autori di lingua inglese indicano con il termine « placement ».

nella trattazione di Noll. Evidentemente ciò comporterà qualche difficoltà per poter arrivare ugualmente a formulare quanto è effettivamente necessario per la trattazione della meccanica e termodinamica dei continui.

3. STRUTTURA TOPOLOGICA, ORIENTAMENTO, INTEGRAZIONE DI UNA FORMA SUL CORPO

La classe delle localizzazioni Φ introdotta sopra permette di dare al corpo una struttura topologica in modo analogo a quello che si usa per le varietà differenziabili (si veda [8] cap. XVII § 1). Fissata una localizzazione φ e indicati con H gli aperti in $\varphi(\mathbf{B})$ si possono determinare gli aperti in $\mathbf{B}$ come le controimmagini $\varphi^{-1}(H)$ degli aperti H . Tale struttura è ben posta ed indipendente da φ per le ipotesi fatte su Φ .

Se ora si fa riferimento ad una localizzazione fissata $\tilde{\varphi} \in \Phi$ essendo $\tilde{\varphi}$ un atlante costituito da una sola carta in quanto è definito su tutto $\mathbf{B}$, risulta possibile determinare su $\mathbf{B}$, in corrispondenza a $\tilde{\varphi}$, una varietà differenziabile di classe C_1 che indicheremo con $B_{[\tilde{\varphi}]}$, come la classe di equivalenza degli atlanti C_1 -compatibili ⁽³⁾ con $\tilde{\varphi}$. Indicheremo poi con $[\tilde{\varphi}]$ la classe di equivalenza degli elementi di Φ C_1 -compatibili con $\tilde{\varphi}$. Evidentemente $[\tilde{\varphi}]$ non si identifica con $B_{[\tilde{\varphi}]}$ ma si ha che $[\tilde{\varphi}]$ è un sottoinsieme degli atlanti di $B_{[\tilde{\varphi}]}$ e d'altra parte se $\varphi \in [\tilde{\varphi}]$ si ha $B_{[\varphi]} = B_{[\tilde{\varphi}]}$. Al corpo in questo modo non si fa corrispondere un'unica struttura di varietà differenziabile, come avviene nella impostazione di Noll, ma tante varietà differenziabili $B_{[\varphi]}$ corrispondenti alle classi di equivalenza definite sopra.

Una volta introdotta, in corrispondenza ad una localizzazione φ , la varietà $B_{[\varphi]}$, è possibile determinare lo spazio tangente in un punto X relativo alla localizzazione φ . Indicheremo con $T_{[\varphi]}(X)$ lo spazio tangente corrispondente alla varietà $B_{[\varphi]}$ in un punto X .

Vediamo ora di studiare la possibilità di orientare le varietà $B_{[\varphi]}$ e lo stesso corpo $\mathbf{B}$ dotato della struttura data sopra. Per ogni $\varphi \in \Phi$ la varietà $B_{[\varphi]}$ è orientabile in quanto φ è un atlante. Alla varietà $B_{[\varphi]}$ si possono associare due varietà orientate, che potremo indicare con $B_{[\varphi]}^+$ e $B_{[\varphi]}^-$, come le classi di equivalenza degli atlanti che appartengono a $B_{[\varphi]}$ e che conservano l'orientamento, cioè tali che il segno dello jacobiano della funzione di trasformazione dall'immagine di un atlante e quella dell'altro è positivo (per una definizione esauriente si veda [8]).

Per determinare un orientamento per $\mathbf{B}$ con la struttura definita dalle localizzazioni Φ teniamo presente che fissate due localizzazioni $\varphi, \psi \in \Phi$ la funzione $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$ per le ipotesi fatte è lipschitziana, quindi per il teorema di Rademacher è dotata di jacobiano $\Delta_\gamma(x)$ quasi ovunque ([10] cap. X § 11

(3) Ricordiamo brevemente che due carte si dicono C_1 -compatibili se la funzione di passaggio tra le immagini della parte in comune dei loro domini di definizione è un isomorfismo di classe C_1 . Per una definizione completa e precisa rimandiamo a [8].

p. 271). Si potrà allora parlare ancora di localizzazioni che rispetto a φ conservano l'orientamento se $\Delta_\gamma(x) > 0$ ovunque sia definito. Infatti si può vedere che se $\Delta_\gamma(x) > 0$ sulle due varietà orientate $B_{[\varphi]^+}$ e $B_{[\psi]^+}$ si ha lo stesso orientamento. Basta ricordare che l'orientamento su una varietà differenziabile determina l'orientamento sullo spazio tangente in un qualsiasi punto della varietà stessa e viceversa. Per avere lo stesso orientamento su $B_{[\varphi]^+}$ e $B_{[\psi]^+}$ basta che abbiano in un punto lo stesso elemento tangente e su tale elemento lo stesso orientamento. Ma ciò è verificato in quanto, sempre per il teorema di Rademacher, esiste un punto X di $\mathbf{B}$ in un intorno del quale γ è di classe C_1 . In X allora gli spazi tangenti a $B_{[\varphi]^+}$ e $B_{[\psi]^+}$ coincidono e conservano l'orientamento fra loro. Con ciò risulta che le varietà $B_{[\varphi]^+}$ e $B_{[\psi]^+}$ hanno lo stesso orientamento. Ciò permette di parlare di orientamento nel corpo $\mathbf{B}$ con la struttura data.

Occorre notare che la condizione $\Delta_\gamma(x) > 0$ è significativa: in effetti una volta fissata una localizzazione φ , da un punto di vista fisico hanno senso solo gli spostamenti γ che soddisfano tale condizione.

Passiamo ora a trattare il problema della integrazione sul corpo $\mathbf{B}$. Fissata la localizzazione $\tilde{\varphi}$ è possibile definire sulla varietà $B_{[\tilde{\varphi}]}$, che ha dimensione tre, l'integrale di una forma differenziale del terzo ordine che indicheremo con $\eta_{[\tilde{\varphi}]}$. Indicando con $\varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]}$ la rappresentazione di $\eta_{[\tilde{\varphi}]}$ attraverso una localizzazione $\varphi \in [\tilde{\varphi}]$ si ha:

$$\int_{B_{[\tilde{\varphi}]}} \eta_{[\tilde{\varphi}]} = \int_{\varphi(\mathbf{B})} \varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]}$$

che risulta indipendente da $\varphi \in [\tilde{\varphi}]$.

Vedremo ora che l'integrazione può essere definita su $\mathbf{B}$. Date infatti le localizzazioni $\varphi \in [\tilde{\varphi}]$ e $\psi \in [\tilde{\varphi}]$, consideriamo $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$. Per le ipotesi fatte γ è lipschitziana e quindi per il teorema di Rademacher l'insieme dove γ non è dotata di differenziale è di misura nulla, pertanto se indichiamo con $\gamma^*(\varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]})$ la trasformazione di $\varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]}$ tramite γ , dove γ è differenziabile, si ha:

$$\int_{\varphi(\mathbf{B})} \varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]} = \int_{\psi(\mathbf{B})} \gamma^*(\varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]}) .$$

Ma allora posto

$$\int_{B_{[\psi]}} \eta_{[\psi]} = \int_{\psi(\mathbf{B})} \psi^* \eta_{[\psi]} = \int_{\psi(\mathbf{B})} \gamma^*(\varphi^* \eta_{[\tilde{\varphi}]}) ,$$

introducendo come simbolo $\int_{\mathbf{B}} \eta$, definiamo l'integrale sul corpo $\mathbf{B}$, indipen-

dentemente dalla localizzazione scelta, nel seguente modo

$$\int_{\mathbf{B}} \eta = \int_{B[\varphi]} \eta_{[\varphi]} = \int_{B[\psi]} \eta_{[\psi]},$$

o anche:

$$\int_{\mathbf{B}} \eta = \int_{\varphi(\mathbf{B})} \varphi^* \eta_{[\varphi]} = \int_{\psi(\mathbf{B})} \psi^* \eta_{[\psi]}.$$

4. SOTTOCORPI

Introduciamo ora la nuova definizione di sottocorpo a cui si è fatto cenno nella introduzione.

Fissata una qualunque localizzazione φ , consideriamo in $\mathbf{B}$ una famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi S , che diremo sottocorpi, con la seguente proprietà:

$\varphi(S)$ siano aperti in $\mathcal{E}$ e siano insiemi di perimetro finito ⁽⁴⁾.

La definizione di sottocorpo data è consistente in quanto è indipendente dalla localizzazione scelta. Ricordiamo che la classe Φ delle localizzazioni è stata scelta in modo che, dette φ e ψ due localizzazioni, la trasformazione $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$ tra le rappresentazioni di un sottocorpo,

$$\gamma: \varphi(S) \rightarrow \psi(S),$$

risulti bilipschitziana. L'indipendenza della definizione data rispetto alla scelta della localizzazione deriva dal fatto che la famiglia degli insiemi di perimetro finito è chiusa rispetto alle trasformazioni bilipschitziane.

Per evidenziare l'opportunità della scelta fatta elenchiamo brevemente alcune altre importanti proprietà degli insiemi di perimetro finito:

a) Costituiscono una famiglia chiusa rispetto alla intersezione, all'unione e alla differenza;

(4) Richiamiamo brevemente il concetto di insieme di perimetro finito, rimandando a [7] per un maggiore approfondimento dell'argomento. Dato un aperto Ω di $\mathbf{R}^n$, si dice che un insieme misurabile $E \subset \Omega$ è di perimetro finito se, detto f_E la funzione caratteristica di E , le sue derivate nel senso delle distribuzioni $D_i f_E$ con $i = 1, 2, \dots, n$, sono misure su Ω , e se la variazione totale della misura vettoriale $(D_1 f_E, D_2 f_E, \dots, D_n f_E)$ data da

$$\int_{\Omega} |Df_E| = \sup. \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n f_E D_i g_i \right) dx : g_i \in C_0^1(\Omega), \sum_{i=1}^n g_i^2 \leq 1 \right\},$$

è finita su Ω . L'espressione $\int_{\Omega} |Df_E|$ si chiama perimetro di E in Ω .

b) Comprendono gli insiemi con contorno generalmente regolare, e più in generale tutti gli insiemi per cui vale la formula di Gauss-Green, in tal caso il perimetro coincide con la misura del bordo che entra nella formula stessa;

c) Possiedono un bordo su cui è possibile definire quasi dappertutto la normale in senso generalizzato;

d) Per essi vale, in senso generalizzato, la formula di Gauss-Green e quindi il teorema della divergenza, anzi costituiscono gli insiemi più generali per cui vale tale formula;

e) Nella topologia data in $\mathcal{E}$ si può determinare una base numerabile costituita da aperti che sono insiemi di perimetro finito (gli aperti lipschitziani sono di perimetro finito).

Vediamo ora come per i sottocorpi definiti sopra si può introdurre il teorema della divergenza in senso generalizzato. Come è noto (si veda [8]) questo teorema può essere dato sulle varietà differenziabili orientate e può essere espresso con la formula di Stokes generalizzata. Estenderemo questa espressione ai nostri sottocorpi che peraltro non sono varietà differenziabili.

Se ω è una forma del secondo ordine, d il simbolo di derivata esterna e ∂S il contorno di S , si dovrà avere:

$$(1) \quad \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

In base ai risultati del paragrafo precedente, fissata una localizzazione φ , poniamo:

$$(2) \quad \int_S d\omega = \int_{\varphi(S)} \varphi^* d\omega.$$

Ma su $\varphi(S)$, che è insieme di perimetro finito in $\mathcal{E}$, vale il teorema della divergenza in senso generalizzato, si ha allora:

$$(3) \quad \int_{\varphi(S)} \varphi^* d\omega = \int_{\partial\varphi(S)} \varphi^* \omega$$

ove $\partial\varphi(S)$ è la rappresentazione tramite φ di ∂S . Pur non avendo ∂S la struttura di varietà differenziabile, applicando i risultati del paragrafo precedente, si ha che l'integrale del secondo membro della (3) risulta indipendente dalla localizzazione φ , si può pertanto porre:

$$(4) \quad \int_{\partial\varphi(S)} \varphi^* \omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Dalle (2), (3) e (4) si ha allora immediatamente la (1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. NOLL (1966) - *The foundation of mechanics*. Non-linear continuum theories, C.I.M.E. lectures. 1965, 159-200, Roma.
- [2] M. E. GURTIN and W. O. WILLIAMS (1967) - *An axiomatic foundation for continuum thermodynamics*. «Arch. Rat. Mech. Anal.», 26, 83-117.
- [3] W. NOLL (1972) - *A new mathematical theory of simple materials*. «Arch. Rat. Mech. Anal.», 48, 1-50.
- [4] W. NOLL (1973) - *Lectures on the foundation of continuum mechanics and thermodynamics*. «Arch. Rat. Mech. Anal.», 52, 62-92.
- [5] C. TRUESDELL (1977) - *A first course in rational continuum mechanics*. I, Academic Press.
- [6] E. DE GIORGI (1954) - *Su una teoria generale della misura $(r-1)$ dimensionale in uno spazio a r dimensioni*. «Ann. di Mat. Pura ed Appl.», serie IV, 36, 191-213.
- [7] G. ANZELOTTI, M. GIANQUINTA, U. MASSARI, G. MODICA e L. PEPE (1974) - *Note sul problema di Plateau*. Editrice tecnico scientifica, Pisa.
- [8] S. LANG (1969) - *Real analysis*. Addison Wesley.
- [9] H. FEDERER (1969) - *Geometric measure theory*. Springer.
- [10] H. WHITNEY (1954) - *Geometric integration theory*. Princeton University Press.