Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pieranita Castellani Rizzonelli

Proprietà di approssimazione $\mathcal{L}^2$ di Runge e problema biarmonico generalizzato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.2, p. 110–116.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_2_110_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Analisi matematica. — *Proprietà di approssimazione $\mathscr{L}^2$ di Runge e problema biarmonico generalizzato.* Nota di PIERANITA CASTELLANI RIZZONELLI, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — It is shown that, under very general hypotheses, the linear elliptic differential system $Lu = 0$ possesses the $\mathscr{L}^2$ Runge property when and only when the Dirichlet problem for the operator LL^* (i.e. the generalized biharmonic problem) has only one solution with a finite energy integral.

Sia X^r lo spazio cartesiano reale ad r dimensioni. Indicheremo con $x \equiv (x_1, \cdots, x_r)$ il punto variabile in X^r. Se u e v sono vettori ad n componenti complesse (brevemente: n-vettori complessi) il loro prodotto scalare $u_i \bar{v}_i$ (1) verrà indicato con uv. Se $a \equiv \{a_{ij}\}$ $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ è una matrice $m \times n$ ad elementi complessi ed u un n-vettore complesso, lo m-vettore le cui componenti sono $a_{ij} u_j$ $(i = 1, \cdots, m)$ sarà indicato con au. La matrice aggiunta della a, cioè la matrice $n \times m$ $\{\bar{a}_{ji}\}$ sarà indicata con $\bar{a}$. Se v è un m-vettore complesso lo n-vettore le cui componenti sono $v_i \bar{a}_{ij}$ $(j = 1, \cdots, n)$ sarà indicato con va, cioè $va = \bar{a}v$.

Sia A un *campo* (insieme aperto) limitato di X^r. Fissato n, indicheremo con $\mathscr{L}^2(A)$ lo spazio delle funzioni a valori n-vettori complessi $u(x)$ tale che $|u(x)|^2$ sia sommabile in A. $\mathscr{L}^2(A)$ è uno spazio di Hilbert con il seguente prodotto scalare:

$$(u, v)_A = \int_A uv \, dx .$$

D'ora in avanti, in questa Nota, parlando di «funzione» intenderemo ogni funzione i cui «valori» siano n-vettori complessi.

Consideriamo il seguente operatore differenziale lineare matriciale di ordine ν

$$Lu = \sum_{0 \leq |s| \leq \nu} a_s(x) D^s u .$$

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1979.

(1) In questa Nota viene usata la convenzione sommatoria secondo cui un indice ripetuto due volte sottointende una sommazione.

I «coefficienti» $a_s(x)$ sono matrici $n \times n$ che supporremo di classe C^∞ in tutto X^r. Se s è il multi-indice $(s_1, \cdots, s_r)$, D^s denota la derivata parziale

$$D^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_r^{s_r}} \qquad |s| = s_1 + \cdots + s_r .$$

Supporremo che L sia ellittico nel senso di Petrowski, cioè per ogni x di X^r ed ogni r–vettore reale ξ non nullo

$$\det \sum_{|s|=\nu} a_s(x)\, \xi^s \neq 0$$

$(\xi^s = \xi_1^{s_1}, \cdots, \xi_r^{s_r} \quad , \quad \xi_k^{s_k} = 1 \quad \text{se} \quad \xi_k = s_k = 0)$.

Sia A′ un campo contenente $\bar{A}$ e sia S uno spazio vettoriale di soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ in A′. Diciamo $\Omega(A)$ la varietà lineare di $\mathscr{L}^2(A)$ costituita dalle funzioni di $\mathscr{L}^2(A)$ che sono soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ in A. $\Omega(A)$ è un sottospazio (cioè una varietà lineare chiusa) di $\mathscr{L}^2(A)$ (2).

In questa Nota ci occuperemo della *completezza* (o *densità*) di S nello spazio $\Omega(A)$, cioè, definendo S opportunamente, vedremo quando accade che, secondo uno locuzione introdotta da P. D. Lax [2], S possiede la *proprietà di approssimazione* $\mathscr{L}^2$ *di Runge*. Si ha cioè

$$\bar{S} = \Omega(A) . \tag{1}$$

Ad esempio se

$$Lu = \sum_{|s|=\nu} a_s D^s u \qquad (a_s \text{ costante}) \tag{2}$$

potremo definire S come lo spazio vettoriale costituito da tutti i polinomi omogenei (cioè dalle funzioni i cui valori siano n–vettori aventi come componenti polinomi omogenei dello stesso grado) che sono soluzioni dell'equazione $Lu = 0$.

Questioni di tal genere sono state studiate da varî Autori anche per topologie diverse da quella dello spazio $\mathscr{L}^2(A)$. Ci limitiamo qui a citare i lavori [2], [3], [4].

La circostanza, però, che ci sembra interessante notare è che il sussistere della (1) è, fatte le opportune ipotesi, perfettamente equivalente al sussistere del teorema di unicità, in una opportuna classe funzionale, per il cosiddetto problema «biarmonico generalizzato» introdotto in [5], cioè per il problema al contorno di Dirichlet, nel campo A, per l'operatore LL^* dove L^* è l'*aggiunto formale* di L, cioè

$$L^* u = \sum_{0 \leq |s| \leq \nu} (-1)^s D^s [\tilde{a}_s(x)\, u] .$$

(2) Infatti se $\{\omega_k\}$ è una successione di funzioni di $\Omega(A)$ che converge a ω nella topologia debole di $\mathscr{L}^2(A)$, allora si ha $(\omega, Lv)_A = 0$ per ogni funzione v di classe C^∞ con supporto contenuto in A. Segue che $\omega \in \Omega(A)$ (cfr. [1], Teor. 5.1, p. 31).

Poiché tale teorema di unicità è facilmente conseguibile, si ottengono immediatamente teoremi di completezza $\mathscr{L}^2$ per le soluzioni di $Lu = 0$ in A.

1. *Ipotesi sul campo* A *e sull'operatore* L.

Indicato con $\mathscr{C}\bar{A}$ l'insieme dei punti di X^r che non appartengono alla chiusura $\bar{A}$ di A, noi supporremo che tanto A che $\mathscr{C}\bar{A}$ siano campi *propriamente regolari* (3).

Supporremo poi che esista un campo limitato B contenente $\bar{A}$ tale che in B sia l'operatore L che l'operatore L^* godono della *proprietà del prolungamento unico* (4).

Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathscr{L}^2(B)$ con il prodotto scalare

$$(u\,,\,v)_B = \int_B uv\,dx\,.$$

In $\mathscr{L}^2(B)$ è definito un operatore lineare T che gode delle seguenti proprietà: I) T è una trasformazione lineare e continua di $\mathscr{L}^2(B)$ nello spazio $H_\nu(B)$ (5); II) la funzione $u = Tf$ è soluzione dell'equazione $Lu = 0$; III) se T^* è l'aggiunto di T nello spazio $\mathscr{L}^2(B)$ [cioè se $(Tf\,,g)_B = (f\,,T^*g)_B\,,\forall f$, $g \in \mathscr{L}^2(B)$], allora per ogni $f \in \mathscr{L}^2(B)$ si ha $T^*f \in H_\nu(B)$ e $L^*T^*f = f$.

L'esistenza degli operatori T e T^* soddisfacenti le sopraelencate proprietà è assicurata da un risultato dovuto a Malgrange (cfr. [3], p. 351].

2. *Problema biarmonico generalizzato e teorema di equivalenza.*

Indicheremo con $\mathscr{U}(A)$ la classe delle funzioni che appartengono ad $H_\nu(A)$ e, per ogni campo A_0 tale che $\bar{A}_0 \subset A$, anche a $H_{2\nu}(A_0)$.

Chiameremo, in accordo a [5], *Problema Biarmonico Generalizzato* (PBG) il seguente:

Trovare u in $\mathscr{U}(A)$ *tale che*

$$LL^*u = f \qquad in\ A \qquad (f \in \mathscr{L}^2(A))$$

$$D^p u = 0 \qquad (0 \le |p| \le \nu - 1) \qquad su\ \partial A\,.$$

(3) Dicendo che un campo A è *propriamente regolare* si intende che: 1) per ogni $x_0 \in \partial A$ esiste un intorno I di x_0 tale che $J = \bar{I} \cap \bar{A}$ sia omeomorfo ad un dominio sferico $B^+ : y_r \ge 0$, $|y| \le 1$ dello spazio cartesiano Y^r ed in questo omeomorfismo l'insieme $\partial A \cap \bar{I}$ è trasformato nell'insieme $y_r = 0\,, y_1^2 + \cdots + y_{r-1}^2 \le 1$; 2) la funzione vettoriale $y = y(x)$ che trasforma omeomorficamente J su B^+ ha derivate prime continue a pezzi (cfr [1] pp. 20 e 21) e la matrice jacobiana $\partial y/\partial x$ ha un determinante il cui estremo inferiore in J è positivo.

(4) Dicendo che un operatore ellittico L gode in B della *proprietà del prolungamento unico* si intende che se u verifica, in un qualsiasi campo connesso J contenuto in B, l'equazione $Lu = 0$ e se $u = 0$ in un campo (non vuoto) I contenuto in J, allora $u = 0$ in tutto J. L'operatore L gode della proprietà del prolungamento unico se i suoi coefficienti sono funzioni analitiche (in particolare costanti) di $x_1, \cdots, x_r$.

(5) Per la definizione di $H_\nu(B)$ cfr. [1], p. 17.

Sia K un campo limitato non vuoto tale che: 1) K sia contenuto in B; 2) $\bar{K}$ e $\bar{A}$ siano disgiunti; 3) se x è un qualsiasi punto di $B - \bar{A}$ esiste una poligonale aperta tutta contenuta in $B - \bar{A}$ che ha un estremo in x e l'altro in un punto di K.

Se E è un sottoinsieme misurabile di B e $\varphi(x)$ una funzione appartenente ad $\mathscr{L}^2(E)$ noi considereremo φ come un elemento di $\mathscr{L}^2(B)$ supponendo di assumere $\varphi = 0$ nei punti di $B - E$. Indicheremo poi con P_E il proiettore ortogonale di $\mathscr{L}^2(B)$ che ad una funzione v di $\mathscr{L}^2(B)$ fa corrispondere la funzione $P_E v$ così definita:

$$P_E v \begin{cases} = v & \text{in } E \\ = 0 & \text{in } B - E . \end{cases}$$

Consideriamo lo spazio vettoriale S costituito da tutte le funzioni

$$v = TP_K \varphi \qquad \forall \varphi \in C^\infty(X^r) .$$

Posto $A' = B - \bar{K}$ si ha $A' \supset A$ e $Lv = 0$ in A'. Il seguente teorema prova che la completezza di S in $\Omega(A)$ è equivalente al teorema di unicità per il PBG.

I. *Condizione necessaria e sufficiente perché sussista la* (1) *è che sia unica la soluzione del PBG.*

La condizione è sufficiente. Sia $\omega \in \Omega(A)$ tale che $(v, \omega)_A = 0$, $\forall v \in S$. Si ha:

$$0 = (v, \omega)_A = (TP_K \varphi, P_A \omega)_B = (P_K \varphi, T^* P_A \omega)_B , \qquad \forall \varphi \in C^\infty(X^r) .$$

Ne segue $w = T^* P_K \omega = 0$ in K. Sia x un qualsiasi punto di $B - \bar{A}$ e sia Π la poligonale contenuta in $B - \bar{A}$ che lo congiunge ad un punto ξ di K. Possiamo ricoprire Π con un numero finito di campi circolari tutti contenuti in $B - \bar{A}$. Diciamo J l'unione di tutti questi campi circolari. J è un insieme aperto e connesso il quale contenendo ξ conterrà tutto un intorno I di ξ appartenente a K. Poichè $L^* w = 0$ in J e $w = 0$ in I, segue $w = 0$ in J e quindi in x. Ne segue $w = 0$ in $B - \bar{A}$. Ma si ha allora, per le ipotesi fatte su A, $D^p w = 0$ $(0 \leq |p| \leq \nu - 1)$ su ∂A [nel senso delle funzioni di $H_\nu(A)$] e $LL^* w = LL^* T^* P_A \omega = L\omega = 0$ in A. Quindi, essendo $w \in \mathscr{U}(A)$, si ha $w = 0$ in A. Ne viene: $0 = L^* w = L^* T^* P_A \omega = \omega$, che prova la (1).

La condizione è necessaria. Sia $u \in \mathscr{U}(A)$ una soluzione del PBG con $f = 0$. Si ha, dato che $D^p u = 0$ su ∂A per $0 \leq |p| \leq \nu - 1$, per la formola di Green,

$$(L^* u, v)_A = 0 \qquad \forall v \in S .$$

Poiché $L^* u \in \Omega(A)$, per la (1) deve essere $L^* u = 0$. Si ha allora, per ogni $z \in \mathscr{L}^2(A)$

$$(u, z)_A = (u, LTz)_A = (L^* u, Tz)_A = 0$$

che, per l'arbitrarietà di z, implica $u = 0$.

3. *Teorema di unicità e teorema di completezza.*

II. *È unica la soluzione del PBG* (cfr. [5]).

Sia $u \in \mathscr{U}(A)$ e soluzione del PBG con $f = 0$. Per le ipotesi fatte su A esiste una successione $\{u_s\}$ di funzioni appartenenti a $\overset{\circ}{C}{}^\infty(A)$ (cioè di classe C^∞ in A e con supporto contenuto in A) convergente nello spazio $H_\nu(A)$ verso u. Si ha allora

$$(L^* u, L^* u)_A = \lim_{s\to\infty} (L^* u_s, L^* u)_A = \lim_{s\to\infty} (u_s, LL^* u) = 0 .$$

Quindi $L^* u = 0$. Basta, a questo punto, ripetere l'ultima parte della dimostrazione del Teorema I per conseguire la tesi.

III. *Con la definizione assunta per* S, *sussiste la* (1).

4. *Equazioni a coefficienti costanti e casi particolari.*

Consideriamo il caso particolare dell'operatore ellittico a coefficienti costanti (2). Volendo provare la completezza di un sistema di polinomi, le ipotesi fatte nel caso generale consigliano di supporre, nel caso attuale, che $\mathscr{C}\bar{A}$ sia un insieme connesso. In questo caso l'operatore T si costruisce esplicitamente per mezzo della convoluzione

$$Tf = \int_B F(x-y) f(y) \, dy \qquad (\forall B \text{ limitato } \supset A) \tag{3}$$

essendo $F(t)$ una matrice $n \times n$ funzione analitica di $t \equiv (t_1, \cdots, t_r)$ in tutto lo spazio tranne che per $t = 0$ dove ha una singolarità, tale però da consentire le derivazioni sotto il segno di integrale, nella (3), fino all'ordine $\nu - 1$ [(6)]. Si ha poi:

$$T^* f = \int_B f(y) F(y-x) \, dy .$$

Indichiamo con $L(\xi)$ la matrice

$$L(\xi) = \sum_{|s|=\nu} a_s \xi^s$$

(6) Per l'espressione esplicita di $F(t)$ cfr. [1], p. 167.

e diciamo $\Lambda(\xi)$ il suo determinante. Sia $\phi(x-y)$ la funzione soluzione fondamentale dell'operatore ellittico scalare $\Lambda(D)$ (cfr. [1], p. 166). Si ha:

$$F(x-y) = \tilde{L}(D)\,\phi(x-y)\,.$$

Con $\tilde{L}(\xi)$ si è indicata la matrice che ha come elemento di indici α, β il complemento algebrico dell'elemento di indici β, α nella matrice $L(\xi)$.

Tenendo presente che la funzione $\phi(t)$ è funzione analitica di t in tutto il piano privato del punto $t = 0$, per $x \in A$ e per y esterno ad una sfera Σ_R di raggio R abbastanza grande, che contiene nel suo interno A, sussiste lo sviluppo assolutamente ed uniformemente convergente per $x \in A$:

$$\phi(x-y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{|k|=h} D_t^k \phi(-y) \frac{x^k}{k!}\,. \tag{4}$$

Detta $Q_1^{(h)}(y), \cdots, Q_{\nu_h}^{(h)}(y)$ una base per le funzione $D_t^k \phi(-y)$ $(|k| = h)$, lo sviluppo (4) può scriversi:

$$\phi(x-y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_h} Q_j^{(h)}(y)\, P_j^{(h)}(x)\,.$$

Le funzione $P_j^{(h)}(x)$ sono polinomi omogenei di grado h nelle variabili $x_1, \cdots, x_r$ che, come è facile vedere, soddisfano l'equazione $\Lambda(D)\, P_j^{(h)}(x) = 0$.

Si ha allora, per la matrice $F(x-y)$, il seguente sviluppo:

$$F_{\alpha\beta}(x-y) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_h} Q_j^{(h)}(y)\, \tilde{L}_{\beta\alpha}(D)\, P_j^{(h)}(x)\,.$$

Supponiamo che S sia lo spazio vettoriale costituito da tutte le funzioni n–vettoriali soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ le cui componenti siano polinomi omogenei nelle variabili $x_1, \cdots, x_r$. Sia $\omega \in \Omega(A)$ tale che

$$\int_A v\omega \, dx = 0 \qquad \forall v \in S\,. \tag{5}$$

La (5) implica:

$$\int_A \overline{\omega}_\alpha(x)\, F_{\alpha\beta}(x-y)\, dx = 0 \qquad (\forall y \in \mathscr{C}\bar{A})\,. \tag{6}$$

Infatti si ha per $x \in A$ e y esterno a Σ_R:

$$\int_A \overline{\omega}_\alpha(x)\, F_{\alpha\beta}(x-y)\, dx = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_h} Q_j^{(h)}(y) \int_A \overline{\omega}_\alpha(x)\, \tilde{L}_{\beta\alpha}(D)\, P_j^{(h)}(x)\, dx\,.$$

Ma riesce

$$L_{\gamma\alpha}(D)\,\tilde{L}_{\beta\alpha}(D)\,P_j^{(h)}(x)\begin{cases} = 0 & \text{per } \gamma \neq \beta \\ = \Lambda(D)\,P_j^{(h)}(x) = 0 & \text{per } \gamma = \beta \end{cases}$$

e quindi la (6). D'altra parte la (6), per l'analiticità rispetto ad y della funzione a primo membro, implica che essa sussiste per ogni y esterno ad A. Ne segue che la (6) è equivalente alla equazione $w = T^* P_A \omega = 0$ valida all'esterno di A. Segue da ciò, per i ragionamenti in precedenza fatti, $\omega = 0$, cioè il sussistere della (1) con l'attuale definizione di S.

Assumendo come L l'operatore scalare Δ_2, da quanto dimostrato in questa Nota segue che la possibilità di approssimare in media una funzione armonica mediante polinomi armonici in un campo A, tale che $\mathscr{C}\bar{A}$ sia connesso e la cui frontiera ∂A sia localmente lipschitziana, è equivalente alla circostanza che, in un tale campo, il classico problema biarmonico ha un'unica soluzione nella classe delle funzioni che hanno finito l'integrale dell'energia.

Assumendo invece $r = 2$ ed $L = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$ si vede che il classico teorema (cfr. [6], p. 45) secondo il quale, in un campo A quale quello sopra menzionato, ogni funzione della variabile $z = x_1 + ix_2$, olomorfa in A ed appartenente a $\mathscr{L}^2(A)$ è il limite in $\mathscr{L}^2(A)$ di una successione di polinomi della variabile z è equivalente al fatto che il problema di Dirichlet per le funzioni armoniche in A, che hanno ivi finito l'integrale dell'energia, ammette un teorema di unicità.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FICHERA (1965) – *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, « Lecture Notes in Mathematics », N. 8, Springer Verlag, 1–176.

[2] P. D. LAX (1956) – *A Stability Theorem for Solutions of Abstract Differential Equations and Its Application to the Study of the Local Behavior of Solutions of Elliptic Equations*, « Communications on Pure and Applied Mathematics », Vol. IX, 747–766.

[3] B. MALGRANGE (1955–1956) – *Existence et Approximation des Solutions des Équations aux Dérivées Partielles et des Équations de Convolution*, « Annales de l'Institut Fourier », Vol. VI, 271–354.

[4] F. E. BROWDER (1962) – *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, « American Journal of Mathematics », Vol. 84, 134–160.

[5] G. FICHERA (1967) – *Generalized Biharmonic Problem and Related Eingevalue Problems*, Blanch Anniversary Volume, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force, 35–44.

[6] J. L. WALSH (1935) – *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, « American Math. Soc. Colloquium Publications », Vol. XX, 1–382.