
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALESSANDRO SCARSELLI

Su certi gruppi non- $\mathcal{P}$ minimali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 66 (1979), n.2, p. 103–109.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_2_103_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Su certi gruppi non- $\mathcal{P}$ minimali* (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let be $\mathcal{P}$ the property of soluble finite groups defined by $G \in \mathcal{P}$ if and only if every p -subgroup of G is permutable with a fixed Hall p' -subgroup of G . Minimal non- $\mathcal{P}$ groups are studied.

Sia $\mathcal{C}$ una classe di gruppi finiti definita da una certa proprietà $\mathcal{P}$; il gruppo G è detto non- $\mathcal{P}$ minimale se esso non gode della proprietà $\mathcal{P}$, mentre ogni suo sottogruppo proprio gode di tale proprietà. I gruppi non- $\mathcal{P}$ minimali rispetto a certe proprietà $\mathcal{P}$ sono stati studiati da diversi autori. Per esempio se $\mathcal{P}$ è la permutabilità fra gli elementi di un gruppo, la classe ad essa associata è quella dei gruppi abeliani e i gruppi non- $\mathcal{P}$ minimali sono stati studiati da Moreno e Miller ([5]) e Rédei ([6]); se $\mathcal{P}$ è data dalla permutabilità fra elementi di periodi primi tra loro, la classe associata a $\mathcal{P}$ è quella dei gruppi nilpotenti e i gruppi non- $\mathcal{P}$ minimali sono stati studiati da O. Y. Schmidt ([8]), Iwasawa ([4]) e Rédei ([6]); se $\mathcal{P}$ è data dalla permutabilità fra i p -elementi e un p' -sottogruppo di Hall, la classe associata è quella dei gruppi p -nilpotenti e i non- $\mathcal{P}$ minimali sono stati studiati da Ito ([3]) (cfr. Huppert ([2])).

Nel presente lavoro si considera la proprietà $\mathcal{P}$ definita dalla permutabilità fra p -sottogruppi e un p' -sottogruppo di Hall, già studiata dall'autore in ([7]) e si determinano i gruppi risolubili non- $\mathcal{P}$ minimali nel seguente

TEOREMA. *Sia p un numero primo e $\mathcal{P}$ la proprietà così definita: X gode della proprietà $\mathcal{P}$ se e solo se X è un gruppo finito con un p' -sottogruppo di Hall permutabile con ogni p -sottogruppo di X . G è un gruppo risolubile non- $\mathcal{P}$ minimale se e solo se:*

- (1) *Un p -sottogruppo di Sylow P di G è normale in G e non ciclico*
- (2) *Il sottogruppo di Frattini $\Phi(P)$ di P è contenuto nel centro di G*
- (3) *P ha esponente p per $p > 2$ e minore o uguale a 4 per $p = 2$*
- (4) *Un p' -sottogruppo di Hall Q di G è un q -gruppo ciclico per un certo numero primo q*

(5) *Detto x un generatore di Q e T la trasformazione lineare indotta da x in $P/\Phi(P)$ riguardato come spazio vettoriale su $GF(p)$, si verifica una delle seguenti condizioni:*

- (a) *T è irriducibile e $x^q \in Z(G)$*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1979.

(b) T è irriducibile, $x^q \notin Z(G)$, $\Phi(P) = \langle 1 \rangle$ ed esiste un naturale n tale che $y^{x^q} = y^n$ per ogni $y \in P$.

(c) P è abeliano elementare d'ordine p^2 e T è rappresentata da una matrice della forma $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$ con $f_i \in \text{GF}(p)$ ($i = 1, 2$), $f_1 \neq f_2$ e $f_1^q = f_2^q$.

DEFINIZIONE 1. Sia p un numero primo. Il gruppo risolubile finito G gode della proprietà $\mathcal{P}$ se e solo se esiste un p' -sottogruppo di Hall H di G permutabile con ogni p -sottogruppo di G . G gode della proprietà $\mathcal{P}^*$ se per ogni p -sottogruppo di G esiste un p' -sottogruppo di Hall di G con esso permutabile.

PROPOSIZIONE 2. (cfr. ([7])). Sia G un gruppo finito risolubile: le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) G gode della proprietà $\mathcal{P}$
- (ii) Esistono un p -sottogruppo di Sylow P di G e un p' -sottogruppo di Hall K di G , tali che ogni sottogruppo di P è permutabile con K
- (iii) Ogni p -sottogruppo di G è permutabile con ogni p' -sottogruppo di Hall di G
- (iv) Ogni sottogruppo di G gode della proprietà $\mathcal{P}^*$
- (v) Detto P un p -sottogruppo di Sylow di G , K un p' -sottogruppo di Hall di G e $O_{p'}(G)$ il p' -sottogruppo normale massimo di G , si verifica una delle seguenti condizioni:

- (a) $K = O_{p'}(G)$
- (b) P è abeliano, $K/O_{p'}(G)$ è ciclico d'ordine divisore di $p-1$ e detto γ un generatore di $K/O_{p'}(G)$, esiste un naturale n tale che $(xO_{p'}(G))^\gamma = x^n O_{p'}(G)$ per ogni $x \in P$.

Nel seguito sia G un gruppo risolubile non- $\mathcal{P}$ minimale.

LEMMA 3. Esiste un numero primo $q \neq p$, tale che G è un $\{p, q\}$ -gruppo.

Dimostrazione. Sia $\{P_1, \dots, P_r\}$ un sistema di Sylow di G con P_1 p -gruppo. Sia per assurdo $r > 2$. $P_1 P_i$ è allora un sottogruppo proprio di G per $2 \leq i \leq r$ e quindi gode della proprietà $\mathcal{P}$; dunque ogni sottogruppo di P_1 è permutabile con P_i (per la prop. 2 (iii)); ne segue che ogni sottogruppo di P_1 è permutabile con l'unione dei P_i ($2 \leq i \leq r$) che è un p' -sottogruppo di Hall di G . Dunque G gode della proprietà $\mathcal{P}$ (per la prop. 2 (ii)) contro l'ipotesi.

Nel seguito sia q il numero primo del Lemma 3.

LEMMA 4. G ha uno ed un solo sottogruppo normale di indice q .

Dimostrazione. Siano M_1 e M_2 sottogruppi normali di G di indice q ; sia, per assurdo, $M_1 \neq M_2$; sia R un p -sottogruppo di G e H un p' -sottogruppo di Hall di G . Per motivi di ordine, $H \cap M_i$ è un p' -sottogruppo di Hall di M_i ($i = 1, 2$) e $H = (H \cap M_1)(H \cap M_2)$; inoltre M_i , essendo normale in G ed avendo indice q primo con p , contiene ogni p -sottogruppo di G e in particolare R ($i = 1, 2$). Quale sottogruppo proprio di G , M_i gode della proprietà

$\mathcal{P}$ e quindi R è permutabile con $H \cap M_i$ ($i = 1, 2$) (per la prop. 2 (iii)). Ne segue che R è permutabile con H e dunque G gode di $\mathcal{P}$, contro l'ipotesi.

Perciò G ha al più un sottogruppo normale di indice q . D'altra parte, in base al Lemma 3, G è un $\{p, q\}$ -gruppo e quindi un suo sottogruppo normale massimo ha indice $p \circ q$. Sia M un sottogruppo normale di G di indice p , P un p -sottogruppo di Sylow di G e H un p' -sottogruppo di Hall di G . Si ha $H \subseteq M$, essendo M normale in G e di indice primo con l'ordine di H , e inoltre il sottogruppo di Frattini $\Phi(P)$ di P è contenuto in M . Essendo M un sottogruppo proprio di G , si ha che M gode di $\mathcal{P}$ e quindi $\Phi(P)$ è permutabile con H . Da ([7], 2.1 pag. 382) segue allora che $PO_{p'}(G) \triangleleft G$ e, per l'argomento di Frattini, $G = N_G(P) O_{p'}(G)$. Sia C un p' -sottogruppo di Hall di $N_G(P)$ e K un p' -sottogruppo di Hall di G contenente C . Vogliamo provare che $P \triangleleft G$. Sia per assurdo $N_G(P) \neq G$, cosicchè $N_G(P)$ è un sottogruppo proprio di G e gode della proprietà $\mathcal{P}$.

Sia R un sottogruppo di P , allora esso è permutabile con C (per la prop. 2 (iii)). D'altra parte R è permutabile con $O_{p'}(G)$ e quindi con $CO_{p'}(G) = H$. Questo contraddice il fatto che G non gode della proprietà $\mathcal{P}$. P è dunque normale in G ed è perciò contenuto in un sottogruppo normale massimo che ha necessariamente indice q .

LEMMA 5. *Sia P un p -sottogruppo di Sylow di G e Q un q -sottogruppo di Sylow di G ; allora Q è ciclico e $P \geq G'$.*

Dimostrazione. Supponiamo, in primo luogo, che G non abbia sottogruppi normali di indice p ; allora ogni sottogruppo normale massimo ha indice q e quindi, per il Lemma 4, G ha un unico sottogruppo normale massimo. Ne segue che G/G' ha un unico sottogruppo massimo ed essendo d'ordine divisibile per q , è un q -gruppo ciclico. Si conclude anche che $P \subseteq G'$ e, per l'argomento di Frattini, $G = N_G(P) G'$. Sia C un q -sottogruppo di Sylow di $N_G(P)$ e H un q -sottogruppo di Sylow di G , contenente C ; si avrà allora $H = C(H \cap G')$.

Sia $N_G(P) \neq G$; allora $N_G(P)$ gode della proprietà $\mathcal{P}$ e dunque, se R è un sottogruppo di P , R è permutabile con C ; analogamente G' gode della proprietà $\mathcal{P}$ e $R \subseteq P \subseteq G'$ onde R è permutabile con $H \cap G'$ e dunque con H . Si ottiene in tal caso una contraddizione, giacchè G non gode della proprietà $\mathcal{P}$. Perciò $P \triangleleft G$. Siano Q_1 e Q_2 sottogruppi massimi distinti di Q ; allora $PQ_1 \triangleleft G$ e $PQ_2 \triangleleft G$, contro il Lemma 4; quindi Q ha un unico sottogruppo massimo ed è perciò ciclico. Inoltre $G/P \simeq Q$ e quindi $P \geq G'$. Rimane da esaminare il caso in cui G ha qualche sottogruppo normale di indice p . Anche in tal caso, procedendo come nella dimostrazione del Lemma 4, si ottiene $P \triangleleft G$ e, con ragionamento analogo a quello svolto precedentemente, si conclude che Q è ciclico e $P \geq G'$.

In base al Lemma 5, G ha un unico p -sottogruppo di Sylow e i q -sottogruppi di Sylow di G sono ciclici. Nel seguito indicheremo con P l'unico p -sottogruppo di Sylow di G , con Q un q -sottogruppo di Sylow di G , con

x un generatore di Q e con T la trasformazione lineare indotta da x in $P/\Phi(P)$ riguardato come spazio vettoriale su $\text{GF}(p)$.

LEMMA 6. *Esiste un sottogruppo massimo S di P che non è permutabile con Q .*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Ogni sottogruppo proprio R di P è contenuto in qualche sottogruppo massimo M di P . Per l'ipotesi assurda, M è permutabile con Q . Quindi MQ è un sottogruppo proprio di G e gode perciò della proprietà $\mathcal{P}$; ne segue che R è permutabile con Q . D'altra parte anche P è permutabile con Q e quindi G gode della proprietà $\mathcal{P}$.

LEMMA 7. *Sia $X \triangleleft G$ e $X \subseteq \Phi(P)$; allora G/X è un gruppo non- $\mathcal{P}$ minimale.*

Dimostrazione. Per il Lemma 6, esiste un sottogruppo massimo S di P non permutabile con Q . Essendo $S \triangleleft P$ e i q -sottogruppi di Sylow di G coniugati mediante elementi di P , ne segue che S non è permutabile con alcun q -sottogruppo di Sylow di G e quindi S/X non è permutabile con alcun q -sottogruppo di Sylow di G/X . Ne segue che G/X non gode della proprietà $\mathcal{P}$. Sia U/X un sottogruppo proprio di G/X ; allora U è un sottogruppo proprio di G e quindi U gode della proprietà $\mathcal{P}$. Sia R/X un p -sottogruppo di U/X e C/X un q -sottogruppo di Sylow di U/X . Sarà $C = XL$ con L q -sottogruppo di Sylow di U . Inoltre R è permutabile con L e quindi R/X è permutabile con $LX/X = C/X$. Ne segue che ogni sottogruppo proprio di G/X soddisfa la proprietà $\mathcal{P}$ e quindi G/X è un gruppo non- $\mathcal{P}$ minimale.

LEMMA 8. *Sia $\Phi(P) = \langle 1 \rangle$, allora si verifica una delle seguenti condizioni:*

(a) T è irriducibile

o

(b) P è abeliano elementare d'ordine p^2 e T è rappresentata da una matrice della forma $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$ con $f_i \in \text{GF}(p)$ ($i = 1, 2$), $f_1 \neq f_2$ e $f_1^q = f_2^q$.

Dimostrazione. Sia T riducibile; allora, per il Teorema di Maschke è $P = P_1 \times P_2$ con P_1 e P_2 Q -invarianti e $P_1 \neq \langle 1 \rangle \neq P_2$. Dunque $P_1 Q$ e $P_2 Q$ sono sottogruppi propri di G e perciò godono della proprietà $\mathcal{P}$. Per la prop. 2 (v), T è rappresentata da una matrice della forma $\begin{pmatrix} f_1 I_1 & 0 \\ 0 & f_2 I_2 \end{pmatrix}$ con I_j matrice unità di ordine uguale alla dimensione di P_j su $\text{GF}(p)$ ($j = 1, 2$). Sia R_i un sottogruppo massimo di P contenente P_i ($i = 1, 2$); allora R_i è permutabile con Q e dunque, sempre per la prop. 2 (v), esiste un elemento $h_i \in \text{GF}(p)$ tale che $y^{h_i} = y^x$ per ogni $y \in R_i$ ($i = 1, 2$). Sia $y = uv$ con $u \neq 1 \neq v$, $u \in P_1$, $v \in P_2$; allora $y^x = u^{f_1} v^{f_2} = (uv)^{h_i}$ e dunque $f_1 = h_i = f_2$ ($i = 1, 2$). Ma G non gode della proprietà $\mathcal{P}$ e si ha quindi una contraddizione. Si conclude che $u = 1$, oppure $v = 1$ e quindi P_1 e P_2 sono sottogruppi massimi di P . Ne segue che P_i ha ordine p ($i = 1, 2$) e quindi P ha ordine p^2 e T è

rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$; è inoltre $f_1 \neq f_2$ giacchè G non gode della proprietà $\mathcal{P}$. Sia Q_1 il sottogruppo massimo di Q ; P è permutabile con Q_1 e PQ_1 gode della proprietà $\mathcal{P}$; dunque, per la prop. 2 (v) esiste un naturale n , tale che $y^x = y^n$ per ogni $y \in P$ e perciò $f_1^q = f_2^q = n \pmod{p}$.

LEMMA 9. Sia $\Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$, allora T è irriducibile.

Dimostrazione. Sia T riducibile. In base al Lemma 7, $G/\Phi(P)$ è non- $\mathcal{P}$ minimale e inoltre $\Phi(P/\Phi(P)) = \langle 1 \rangle$; si può quindi applicare il Lemma 8, concludendo che $[P : \Phi(P)] = p^2$ e T è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$, $f_1 \neq f_2$ e $f_1^q = f_2^q$. Esistono perciò elementi u, v in $P \setminus \Phi(P)$ tali che, dette $\bar{u}$ e $\bar{v}$ le rispettive immagini in $P/\Phi(P)$ risulta $\bar{u}T = \bar{u}^{f_1}$ e $\bar{v}T = \bar{v}^{f_2}$. Sia $P_1 = \langle u \rangle \Phi(P)$ e $P_2 = \langle v \rangle \Phi(P)$. P_1 e P_2 sono Q -invarianti e quindi $P_i Q$ è un sottogruppo proprio di G e perciò gode di $\mathcal{P}$ ($i = 1, 2$). In base alla prop. 2 (v) esistono numeri naturali n_1 e n_2 , tali che $y^{n_i} = y^x$ ($i = 1, 2$). Perciò $y^{n_1} = y^{n_2}$ per ogni $y \in P_1 \cap P_2 \supseteq \Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$. Ne segue $n_1 \equiv n_2 \pmod{p}$; ma $f_i = n_i \pmod{p}$ e quindi $f_1 = f_2$, una contraddizione.

LEMMA 10. $\Phi(P)$ è abeliano ed esiste un naturale n tale che $y^x = y^n$ per ogni $y \in \Phi(P)$.

Dimostrazione. Consideriamo $\Phi(P)Q$, che è un sottogruppo proprio di G e che quindi verifica la proprietà $\mathcal{P}$. In base alla prop. 2 (v) $\Phi(P) \leq N_G(Q)$ oppure vale la conclusione del Lemma. Rimane quindi da indagare solo sulla prima eventualità. In tal caso è $Q \leq C_G(\Phi(P))$. Sia $C_G(\Phi(P)) \neq G$; allora $C_G(\Phi(P))$ gode della proprietà $\mathcal{P}$. In base alla prop. 2 (v) è $Q \triangleleft C_G(\Phi(P))$ oppure un p -sottogruppo di Sylow R di $C_G(\Phi(P))$ è abeliano ed esiste un naturale n tale che $y^x = y^n$ per ogni $y \in R$. La prima ipotesi è da scartare, non essendo Q normale in G . Essendo $C_G(\Phi(P)) \neq G$ è $\Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$ e quindi $R \cap \Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$; ma Q centralizza $\Phi(P)$ e si giunge quindi a una contraddizione. Se poi $C_G(\Phi(P)) = G$, è $\Phi(P) \leq Z(G)$, onde ovviamente vale la conclusione del Lemma.

LEMMA 11. $\Phi(P) \leq Z(P)$.

Dimostrazione. Se $\Phi(P) = \langle 1 \rangle$ è chiaramente $\Phi(P) \leq Z(P)$. Sia $\Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$; in base ai Lemmi 8 e 9, $P/\Phi(P)$ è un sottogruppo normale minimo di $G/\Phi(P)$. D'altra parte $P \cap C_G(\Phi(P)) = C_P(\Phi(P))$ è un sottogruppo normale di G e inoltre, per il Lemma 10, è $\Phi(P) \leq C_P(\Phi(P))$. Ne segue che $C_P(\Phi(P))/\Phi(P)$ è un sottogruppo normale di $G/\Phi(P)$ contenuto in $P/\Phi(P)$; dunque $C_P(\Phi(P)) = \Phi(P)$ oppure $C_P(\Phi(P)) = P$, nel qual caso è $\Phi(P) \leq Z(P)$. Sia $C_P(\Phi(P)) = \Phi(P)$. Sia L un q -sottogruppo di Sylow di $C_G(\Phi(P))$. In base al Lemma 10, $\Phi(P)$ è supersolubilmente immerso in G (cfr. Baer ([I])) e dunque $G/C_G(\Phi(P))$ è supersolubile (Baer ([I])). Essendo $C_P(\Phi(P)) = \Phi(P)$, $\Phi(P)$ è il p -sottogruppo di Sylow di $C_G(\Phi(P))$ onde $C_G(\Phi(P)) = \Phi(P)L$ e $G/\Phi(P)L$ è supersolubile.

Sia $q \nmid [G : \Phi(P)L]$, allora, essendo $P/\Phi(P)$ normale minimo in $G/\Phi(P)$, si ha che $PL/\Phi(P)L$ è normale minimo in $G/\Phi(P)L$ e quindi ha ordine p , essendo $G/\Phi(P)L$ supersolubile. Ma $PL/\Phi(P)L \simeq P/\Phi(P)$ e quindi $[P : \Phi(P)] = p$ e P è ciclico. Ne segue che ogni sottogruppo di P è permutabile con Q contro il fatto che G non gode della proprietà $\mathcal{P}$. Perciò $q \nmid [G : \Phi(P)L]$, onde L è un q -sottogruppo di Sylow di G . Da $\Phi(P)L \triangleleft G$ e $\Phi(P)L = \Phi(P) \times L$, segue $L \triangleleft G$, una contraddizione. Dunque $\Phi(P) \subseteq Z(P)$.

LEMMA 12. *Se P è abeliano è $\Phi(P) = \langle 1 \rangle$; se P non è abeliano P ha esponente p per $p > 2$ ed esponente 4 per $p = 2$.*

Dimostrazione. In base al Lemma 11, si ha $\Phi(P) \subseteq Z(P)$; in particolare P è di classe ≤ 2 . Siano $a, b \in P$, si ha allora $(ab)^n = a^n b^n [a, b]_2^{(n)}$ per ogni naturale n . Da $\Phi(P) \subseteq Z(P)$ segue allora che, per $p > 2$ (o in ogni caso se P è abeliano), l'applicazione $a \rightarrow a^p$ è un endomorfismo di P e, analogamente l'applicazione $a \rightarrow a^4$ per $p = 2$. In ogni caso, tale endomorfismo è compatibile con l'azione di G .

Sia K il suo nucleo e I la sua immagine; risulta allora che P/K è G -isomorfo ad I . D'altra parte $I \subseteq \Phi(P)$ e quindi, per il Lemma 10, esiste un naturale n tale che $y^x = y^n$ per ogni $y \in I$. Sia φ il G -isomorfismo indotto dall'endomorfismo considerato, risulta allora $(yK)^x \varphi = ((yK)\varphi)^x = ((yK)\varphi)^n = (y^n K)\varphi$, e dunque $(yK)^x = y^n K$ per ogni $y \in P$. Se $\Phi(P) = \langle 1 \rangle$ valgono le conclusioni del Lemma. Sia $\Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$, allora, per i Lemmi 8 e 9, $P/\Phi(P)$ è normale minimo in $G/\Phi(P)$ e dunque $K\Phi(P) = P$ oppure $K \subseteq \Phi(P)$. Nel primo caso è $K = P$ e dunque $I = \langle 1 \rangle$ e valgono le conclusioni del Lemma. Sia $K \subseteq \Phi(P)$; si ha allora $(y\Phi(P))^x = y^n \Phi(P)$ per ogni $y \in P$ ed essendo $P/\Phi(P)$ normale minimo in $G/\Phi(P)$, si ottiene $[P : \Phi(P)] = p$. Dunque P è ciclico contro il fatto che G non gode della proprietà $\mathcal{P}$.

LEMMA 13. *Sia $\Phi(P) \neq \langle 1 \rangle$; allora $x^q \in Z(G)$ e x induce l'identità in $\Phi(P)$.*

Dimostrazione. In base al Lemma 12, P non è abeliano e $P \langle x^q \rangle$, quale sottogruppo proprio di G , gode della proprietà $\mathcal{P}$. Per la prop. 2 (v) si ha $\langle x^q \rangle \triangleleft P \langle x^q \rangle$ e quindi $x^q \in C_G(P)$; dunque $x^q \in Z(G)$. Perciò T^q è l'identità, onde il polinomio minimo di T divide $x^q - 1$; essendo T irriducibile, tale polinomio non ha soluzioni in $GF(p)$ e quindi $q \nmid p - 1$. Per il Lemma 10, esiste un naturale n , tale che $y^x = y^n$, per ogni $y \in \Phi(P)$ e dunque $n = 1$, giacchè $q \nmid p - 1$, cioè x induce l'identità in $\Phi(P)$.

Come abbiamo già notato, P non può essere ciclico e quindi i Lemmi 3-13 completano la dimostrazione del Teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BAER (1959) - *Supersoluble immersion*, «Canad. Journ. Math.», *II*, 353-369.
- [2] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen I*, Berlin, Heidelberg, New York.
- [3] N. ITO (1951) - *Note on (LM)-groups*, «Kodai Math. Sem. Report», 1-6.
- [4] K. IWASAWA (1941) - *Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind*, «Proc. Phys. Math. Soc. Japan», *23*, 1-4.
- [5] G. A. MILLER e H. MORENO (1903) - *Non abelian groups in which every subgroup is abelian*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *4*, 398-404.
- [6] L. REDEI (1956) - *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, «Publ. Math. Debrec.», *4*, 303-324.
- [7] A. SCARSELLI (1973) - *Sulla p -profondità di un gruppo finito risolubile*, «Le Matematiche», *28*, 378-389.
- [8] O. Y. SCHMIDT (1924) - *Über Gruppen, deren sämtlich Teiler spezielle Gruppen sind*, «Math. Sbornik», *31*, 366-372.