Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Boccotti

Le distribuzioni degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.6, p. 287–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_6_287_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Oceanografia. — *Le distribuzioni degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo* (*). Nota I di PAOLO BOCCOTTI (**), presentata (***) dai Corrisp. B. DE FINETTI e E. MARCHI.

SUMMARY. — A rigorous solution for the distributions of intervals between zeros of random functions is presented. Such a solution is then developed in detail for a gaussian random process.

The present analysis has immediate connexions with the probabilistic approach to the calculation of apparent periods of wind generated waves on ocean surface. The results of this note may also find some applications in other fields of engineering.

1. Si presenta una soluzione rigorosa per il problema della distribuzione degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo continuamente derivabili in $(0, \infty)$, problema già affrontato tra gli altri da Rice (1944), (1945), Mc Fadden (1956), (1958) e Longuet-Higgins (1958), (1962). La predetta soluzione viene quindi sviluppata completamente per il modello di un processo stazionario ed ergodico di tipo gaussiano, adottato da Longuet-Higgins (1952), (1963), (1975) per la rappresentazione del profilo delle onde generate dal vento su profondità infinita. Esso può essere proposto nella forma

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sigma_n t + \varepsilon_n) . \tag{1.1}$$

La ζ è una funzione del tempo t che può rappresentare, ad esempio, lo spostamento verticale della superficie libera del mare in un assegnato punto. Il processo si compone delle infinite realizzazioni della funzione $\zeta(t)$, secondo i valori che di volta in volta assumono le variabili ordinate c_n, σ_n ed ε_n. Tali variabili aleatorie che rappresentano, rispettivamente, ampiezza, frequenza ed angolo di fase delle onde sinusoidali componenti, vengono definite in modo tale che il processo (1.1) presenti caratteristiche di stazionarietà ed ergodicità. In particolare, per ogni realizzazione del processo, le variabili c_n devono essere tali che

$$\sum_n \tfrac{1}{2} c_n^2 = \mathrm{E}(\sigma)\,\delta\sigma \quad \text{per quei valori di } n \text{ tali che } \sigma_n \in [\sigma, \sigma + \delta\sigma] , \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2} c_n^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{E}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = m_0 ,$$

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova.

(**) Ing. Paolo Boccotti borsista C.N.R. presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova, via Montallegro 1 – 16145 Genova.

(***) Nella seduta del 16 dicembre 1978.

dove $\delta\sigma$ è un prefissato intervallo infinitesimo, $E(\sigma)$ è la funzione densità spettrale di energia ed m_0 il momento di ordine zero della $E(\sigma)$ rispetto all'asse $\sigma = 0$.

Mediante l'analisi del modello (1.1) Longuet-Higgins (1952) ha derivato la legge di distribuzione di tipo rayleiano per le ampiezze delle onde apparenti nell'ipotesi di spettro di energia stretto; tale distribuzione è stata confermata come valida per la quasi totalità delle condizioni di mare dai rilievi sperimentali operati nei successivi venticinque anni in ogni parte del mondo. Si osserva che per il processo (1.1), a differenza della densità di probabilità delle ampiezze apparenti, quella degli intervalli tra gli zeri non tende ad una funzione ordinaria quando la larghezza dello spettro si approssima a zero, bensì tende ad una funzione di Dirac. Ne consegue che qualsiasi funzione ordinaria per la densità di probabilità degli intervalli tra gli zeri, può essere ricavata solamente mediante la precisazione della funzione densità spettrale di energia $E(\sigma)$.

2. Per una funzione aleatoria $\zeta(t)$ del tempo continuamente derivabile in $(0, \infty)$, considerati gli istanti t per i quali $\zeta(t) = 0$, si indica con $p_i(T)$ la densità di probabilità dell'intervallo di tempo T che separa l'istante t da quello $t + T$ dell'i+lesimo zero di ζ successivo a quello di t. In particolare per $i = 0$ ed $i = 1$ l'intervallo di tempo T viene definito, rispettivamente, semiperiodo e periodo apparente.

Per un intervallo di tempo $\mathscr{T}$ $(\mathscr{T} > 0)$, si considera la funzione $p(\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}, \zeta_{t+\mathscr{T}} \mid \zeta_t)$, dove $\dot{\zeta}$ è la derivata rispetto al tempo di ζ e la simbologia ζ_t sostituisce per semplicità la $\zeta(t)$. Tale funzione rappresenta la densità di probabilità congiunta delle variabili ζ e $\dot{\zeta}$ all'istante $t + \mathscr{T}$ per un fissato valore di ζ all'istante t. Si considerano inoltre le funzioni $p_i(T, \dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}})$ che, per $\zeta(t) = 0$, rappresentano la densità di probabilità dell'intervallo di tempo T tra t e l'istante dell'i+lesimo zero di ζ successivo a quello di t, congiuntamente con $\dot{\zeta}$ all'istante $t + \mathscr{T}$.

Se le funzioni considerate sono continue dalle precedenti definizioni discende la seguente identità

$$p(\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathscr{T}} \mid \overline{\zeta}_t)\, d\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}\, \delta\zeta_{t+\mathscr{T}} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\mathscr{T}, \dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}})\, d\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}\, dT \tag{2.1}$$

dove la sopralineatura indica che si considera il valore zero della variabile e dove si ha

$$\delta\zeta_{t+\mathscr{T}} = |\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}|\, dT\,. \tag{2.2}$$

La (2.1) può essere riscritta nella forma

$$p(\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathscr{T}} \mid \overline{\zeta}_t)\, |\dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}}| = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\mathscr{T}, \dot{\zeta}_{t+\mathscr{T}})\,. \tag{2.3}$$

Se la funzione in $\dot{\zeta}_{t+\mathcal{T}}$ a primo membro di questa equazione è limitata, la serie converge e, considerato che le funzioni $p_i(\mathrm{T}, \dot{\zeta}_{t+\mathcal{T}})$ sono definite positive, la convergenza è assoluta. Per integrazione di ambo i membri della (2.3) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{\zeta}_{t+\mathcal{T}}|\, p(\dot{\zeta}_{t+\mathcal{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathcal{T}} \,|\, \overline{\zeta}_t)\, d\dot{\zeta}_{t+\mathcal{T}} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\mathcal{T}) . \tag{2.4}$$

Avendo fissato $\mathcal{T}$ come intervallo di tempo arbitrario e maggiore di zero la (2.4) può assumere la forma generale

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(\mathrm{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}|\, p(\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_t)\, d\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}/p(\overline{\zeta}_t) . \tag{2.5}$$

In seguito la serie delle funzioni $p_i(\mathrm{T})$ verrà indicata con il simbolo $\mathrm{S}(\mathrm{T})$.

3. Indicando con $\langle \mathrm{T}_0 \rangle$ il valore medio di T rispetto a p_0, si definisce la variabile adimensionale

$$\tau = \mathrm{T}/\langle \mathrm{T}_0 \rangle \qquad \text{con} \qquad \langle \mathrm{T}_0 \rangle = \pi\,(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} \text{ (1)} \tag{3.1}$$

se esiste il momento m_2 del secondo ordine rispetto all'asse $\sigma = 0$ della funzione densità spettrale di energia $\mathrm{E}(\sigma)$.

Si possono pertanto ricavare le nuove densità di probabilità

$$\tilde{p}_i(\tau) = \pi\,(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}}\, p_i(\mathrm{T}) . \tag{3.2}$$

Sostituendo nella (2.5) la variabile T con la variabile adimensionale τ, si ottiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{p}_i(\tau) = 2\,\pi\,(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}\, p(\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_t)\, d\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}/p(\overline{\zeta}_t) . \tag{3.3}$$

In seguito la serie delle funzioni $\tilde{p}_i(\tau)$ verrà indicata con il simbolo $\tilde{\mathrm{S}}(\tau)$. In questa equazione si è tenuto conto della simmetria, rispetto all'asse $\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}} = 0$, della $p(\dot{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_{t+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_t)$ relativa al processo gaussiano (1.1). Per tale processo le funzioni densità di probabilità che compaiono nella (3.3) possono essere determinate con riferimento all'insieme delle realizzazioni. Pertanto fissato un istante arbitrario t_0 la $\tilde{\mathrm{S}}(\tau)$ può essere espressa nella forma

$$\tilde{\mathrm{S}}(\tau) = 2\,\pi\,(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \dot{\zeta}_{t_0+\mathrm{T}}\, p(\dot{\zeta}_{t_0+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_{t_0+\mathrm{T}}, \overline{\zeta}_{t_0})\, d\dot{\zeta}_{t_0+\mathrm{T}}/p(\overline{\zeta}_{t_0}) . \tag{3.4}$$

(1) Il valore di $\langle \mathrm{T}_0 \rangle$ nella (3.1), relativo al processo (1.1), è stato calcolato per la prima volta da Rice (1944) come inverso del numero medio di zeri per unità di tempo.

Le $\dot{\zeta}_{t_0+T}$, ζ_{t_0+T}, ζ_{t_0} risultano funzioni delle variabili aleatorie ordinate c_n, σ_n, ε_n. Assumendo che siano soddisfatte le condizioni necessarie per l'applicabilità del teorema del limite centrale, la densità di probabilità congiunta delle $\dot{\zeta}_{t_0+T}$, ζ_{t_0+T}, ζ_{t_0} risulta di tipo gaussiano. Essa è individuata dai valori medi (tutti eguali a zero) e dalla seguente matrice di covarianza i cui elementi possono essere determinati con riferimento alla generica realizzazione del processo

$$\begin{bmatrix} m_0 & \psi_I(T) & \psi_I'(T) \\ \psi_I(T) & m_0 & 0 \\ \psi_I'(T) & 0 & m_2 \end{bmatrix} . \tag{3.5}$$

In essa la ψ_I si ottiene per trasformazione della funzione densità spettrale di energia $E(\sigma)$ mediante la

$$\psi_I(T) = \int_0^\infty E(\sigma) \cos \sigma T \, d\sigma \tag{3.6}$$

e la ψ_I' indica la derivata della ψ_I. Date le considerazioni precedenti sulla densità di probabilità congiunta delle $\dot{\zeta}_{t_0+T}$, ζ_{t_0+T}, ζ_{t_0}, si può ricavare l'espressione

$$p(\dot{\zeta}_{t_0+T}, \overline{\zeta}_{t_0+T}, \overline{\zeta}_{t_0}) = (2\pi)^{-3/2} B^{-1/2}(T) \exp\left[-\tfrac{1}{2} \dot{\zeta}^2_{t_0+T} A(T)/B(T)\right] \tag{3.7}$$

dove le funzioni $A(T)$ e $B(T)$ si ottengono dalla $E(\sigma)$ mediante le

$$A(T) = m_0^2 - \psi_I^2(T) \quad ; \quad B(T) = m_0^2 m_2 - m_2 \psi_I^2(T) - m_0 \psi_I'^2(T) . \tag{3.8}$$

La distribuzione della ζ_{t_0}, in particolare, risulta di tipo gaussiano ed è individuata dal valore medio zero e dalla covarianza m_0, pertanto

$$p(\overline{\zeta}_{t_0}) = (2\pi m_0)^{-\frac{1}{2}} . \tag{3.9}$$

Particolarizzando nella (3.4) le funzioni densità di probabilità mediante le espressioni (3.7) e (3.9) ed operando l'integrazione a secondo membro, si ottiene

$$\tilde{S}(\tau) = m_0 \left[m_0^2 - \psi_I^2(T) - (m_0/m_2)\psi_I'^2(T)\right]^{\frac{1}{2}} / \left[m_0^2 - \psi_I^2(T)\right] . \tag{3.10}$$

Definita la funzione

$$\psi(\tau) = \psi_I(T)/m_0 , \tag{3.11}$$

la relazione (3.10) può essere trasformata nella

$$\tilde{S}(\tau) = \left[1 - \psi^2(\tau) - \psi'^2(\tau)/\pi^2\right]^{\frac{1}{2}} / \left[1 - \psi^2(\tau)\right] \tag{3.12}$$

dove ψ' è la derivata della ψ. La $\tilde{S}(\tau)$ è stata ricavata per T, ovvero τ, maggiore di zero; si definisce per continuità $\tilde{S}(o) = \lim_{\tau \to 0} \tilde{S}(\tau)$, se questo limite esiste (v. appendice B).

Se il momento m_2 esiste, la funzione densità spettrale di energia $E(\sigma)$ può essere espressa nella seguente forma implicita

$$E(\sigma) = m_0 (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} f(\tilde{\sigma}) \qquad \text{per} \quad \tilde{\sigma} = \sigma (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.13}$$

I momenti della $f(\tilde{\sigma})$ rispetto all'asse $\tilde{\sigma} = 0$, di ordine zero e due, siano entrambi uguali ad uno. Viceversa, definita una funzione $f(\tilde{\sigma}) \geq 0$ in $[0, \infty)$ ed avente i momenti di ordine zero: $\tilde{m}_0$ e due: $\tilde{m}_2$, presi rispetto all'asse $\tilde{\sigma} = 0$, tali che

$$\tilde{m}_0 = \tilde{m}_2 = 1 , \tag{3.14}$$

viene individuata mediante la (3.13) una famiglia di funzioni densità spettrale di energia in termini dei rispettivi momenti m_0 ed m_2. A tale famiglia corrisponde un'unica funzione $\psi(\tau)$ e, per la (3.12), un'unica funzione $\tilde{S}(\tau)$; in quanto la $\psi(\tau)$ si può ricavare dalla $f(\tilde{\sigma})$ mediante la relazione

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty f(\tilde{\sigma}) \cos(\pi \tilde{\sigma} \tau) \, d\tilde{\sigma} \tag{3.15}$$

alla quale si giunge dalle (3.6), (3.11) dopo aver sostituito le variabili T e σ con le variabili adimensionali τ e $\tilde{\sigma}$ e dopo aver utilizzato la relazione (3.13) per la funzione densità spettrale di energia in forma implicita.

In una Nota successiva, utilizzando le serie $\tilde{S}(\tau)$, si ricavano alcune soluzioni numeriche per le funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$.

APPENDICI

A. Si definisce il parametro $\delta = \mathcal{M}_2/m_2$, dove $\mathcal{M}_2$ è il momento del secondo ordine della funzione densità spettrale di energia $E(\sigma)$ valutato rispetto alla relativa frequenza media $\langle\sigma\rangle$.

Si ha

$$\delta = 1 - \langle\sigma\rangle^2 \, m_0/m_2 . \tag{A.1}$$

La frequenza $\langle\sigma\rangle$ è esprimibile in termini del valore medio $\langle\tilde{\sigma}\rangle$ della $f(\tilde{\sigma})$ mediante la relazione

$$\langle\sigma\rangle = (m_2/m_0)^{\frac{1}{2}} \langle\tilde{\sigma}\rangle \tag{A.2}$$

che è ricavabile dalla (3.13). Pertanto, sostituendo nella (A.1) a $\langle\sigma\rangle$ la sua espressione (A.2), si ricava per δ la relazione

$$\delta = 1 - \langle\tilde{\sigma}\rangle^2 . \tag{A.3}$$

Il parametro δ è definito in $(0, 1)$ ed è unico per una famiglia di spettri ottenuta dalla medesima funzione $f(\tilde{\sigma})$. Quando δ tende a zero gli spettri della corrispondente famiglia risultano via via più stretti; viceversa, per δ tendente ad uno, essi diventano via via più larghi (momenti m di ordine maggiore al secondo tendenti all'infinito). Esso appare come un parametro validamente indicativo su tutto il suo dominio di esistenza per spettri aventi momenti m di qualsiasi ordine.

B. Dalla espressione (3.15) relativa a $\psi(\tau)$ si ricavano le seguenti relazioni tra le derivate di ordine r della $\psi(\tau)$ all'origine ed i momenti $\tilde{m}_r$ di ordine r della $f(\tilde{\sigma})$ rispetto all'asse $\tilde{\sigma} = 0$

$$\psi_0^r = \begin{cases} 0 & \text{per } r \text{ dispari,} \\ (-1)^{\frac{1}{2}r}\, \pi^r\, \tilde{m}_r & \text{per } r \text{ pari,} \end{cases} \tag{B.1}$$

dove si è utilizzata la simbologia $\psi_\tau = \psi(\tau)$. In particolare, per le condizioni (3.14), si ha

$$\psi_0 = 1 \quad , \quad \psi_0'' = -\pi^2 . \tag{B.2}$$

Pertanto la $\tilde{S}(\tau)$ espressa dalla relazione (3.12) assume la forma indeterminata 0/0, per τ tendente a zero. Il corrispondente limite l risulta

$$l = [-(\pi^2 \psi_0'' + \psi_0^{\mathrm{IV}})/4\, \pi^2 \psi_0^2\, \psi_0'']^{\frac{1}{2}} , \tag{B.3}$$

che per le (B.1), (B.2) si riduce alla forma

$$l = \tfrac{1}{2}(\tilde{m}_4 - 1)^{\frac{1}{2}} . \tag{B.4}$$

Per le famiglie di spettri aventi momenti m di qualsiasi ordine, il limite l varia da zero ad infinito al variare del parametro di larghezza δ (A.3) da zero ad uno.

BIBLIOGRAFIA

LONGUET-HIGGINS M. S. (1952) – « J. Marine Res. », *11*, 245.
LONGUET-HIGGINS M. S. (1958) – « Proc. Roy. Soc. », A-*246*, 99.
LONGUET-HIGGINS M. S. (1962) – « Phil. Trans. Roy. Soc. », A-*254*, 557.
LONGUET-HIGGINS M. S. (1963) – « J. Fluid Mech. », *17*, 459.
LONGUET-HIGGINS M. S. (1975) – « J. Geoph. Res. », *80*, 2688.
MC FADDEN J. A. (1956) – « Trans. Inst. Rad. Engr. », IT-*2*, 146.
MC FADDEN J. A. (1958) – « Trans. Inst. Rad. Engr. », IT-*4*, 14.
RICE S. O. (1944) – « Bell Syst. Tech. J. », *23*, 282.
RICE S. O. (1945) – « Bell Syst. Tech. J. », *24*, 46.