Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Franchi

Sull'unicità delle soluzioni delle equazioni di Boussmesq modificate in base all'equazione costitutiva di Cattaneo—Fox in un dominio illimitato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.6, p. 275–281.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_6_275_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Fisica matematica. — *Sull'unicità delle soluzioni delle equazioni di Boussinesq modificate in base all'equazione costituti a di Cattaneo–Fox in un dominio illimitato.* Nota di FRANCA FRANCHI (*), presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — Employing the weight function method, we establish a uniqueness theorem for the heat propagation by natural convection governed by the Boussinesq equations when we replace Fourier's constitutive equation by Cattaneo–Fox' one, on an exterior domain. We prove the theorem without boundedness assumptions on the velocity gradient and on the temperature.

1. In una Nota precedente [1], ho stabilito un teorema di unicità per le equazioni di Boussinesq relative alla propagazione del calore per convezione naturale dove, però, all'equazione costitutiva di Fourier si sostituisca quella di Cattaneo–Fox in un dominio limitato. In questa Nota, intendo estendere detto teorema di unicità al caso di un dominio illimitato Ω (precisamente esterno ad una o più superfici Σ) occupato da un fluido viscoso ed omogeneo e con le stesse condizioni iniziali e alla frontiera Σ' di [1].

Sia quindi $(\boldsymbol{v}_1, T_1, p_1, \boldsymbol{q}_1)$ (1) un'eventuale soluzione delle equazioni sopra citate: noi dimostreremo il teorema, come già in [1], per le soluzioni di classe C^1 in $\Gamma_{t'} = \Gamma \times [0, t']$ dove $\Gamma = \Omega \cup \Sigma$, con l'ulteriore ipotesi che la velocità ammetta anche derivate seconde spaziali generalmente continue in $\Gamma_{t'}$ (diremo, per brevità, che tali soluzioni sono di tipo classico).

Trattandosi, però, di un dominio illimitato, occorre aggiungere per le predette soluzioni alcune condizioni di limitatezza e di convergenza all'infinito.

Detta r la distanza di un punto P di Ω da un punto P_0 scelto internamente ad Ω_0, dominio racchiuso dalla Σ, ammetteremo, come in [2], che la pressione p_1 per $r > \bar{r}$ ($\bar{r} > 0$ e sufficientemente grande) sia tale che $|p_1 - \bar{p}| = O$ (2) $((\log r)^{\delta}/r^{1/2})$, $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ (dove $\bar{p}$ è la pressione all'infinito che supponiamo assegnata e costante).

Ammetteremo inoltre $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{q}_1$ limitate in $\Omega \times [0, t']$ assieme a $\nabla \boldsymbol{q}_1$ e a ∇T_1: per $\nabla \boldsymbol{v}_1$, invece, ci basterà richiedere che la sua parte antisimmetrica,

(*) Borsista del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 dicembre 1978.

(1) Dove $\boldsymbol{v}_1, T_1, p_1, \boldsymbol{q}_1$ indicano rispettivamente la velocità, la temperatura, la pressione e il vettore flusso di calore del fluido, funzioni del generico punto P di Ω e dell'istante $t \in [0, t'], t' > 0$ e del resto qualsiasi.

(2) In seguito, preciseremo meglio il significato del simbolo O; comunque, per maggiori informazioni, rimandiamo per esempio a [1].

cioè rot $\boldsymbol{v}_1$, sia per $r > \bar{r}$ del tipo $O(r^k)$, con $k \geq 0$, ed un comportamento analogo sarà preteso anche per T_1.

In [4] è stato trattato un problema simile, sempre di conduzione e diffusione retto dalle equazioni di Boussinesq, senza però la suddetta modifica dell'equazione di Fourier (per cui risulta naturalmente cambiata anche la natura delle equazioni) per un fluido al solito viscoso e conduttore di calore dal punto di vista dell'unicità delle soluzioni (di tipo classico) e della dipendenza continua dai dati iniziali e alla frontiera: sfruttando soprattutto la tecnica descritta in [5], il teorema di unicità viene dimostrato assumendo la limitatezza del gradiente di velocità, mentre si ammette la velocità infinita come $O(r^{1/2})$ oppure come $O(r^{1-\sigma})$ a seconda che la pressione (o meglio la pressione riferita al suo valore per $r \to \infty$) sia infinitesima all'infinito come $O(r^{-1/2})$ oppure come $O(r^{-1/2-\varepsilon})$, ε, σ costanti positive.

Per la dimostrazione del teorema della presente Nota, ci serviremo largamente dei risultati della Nota precedente.

Indicheremo, intanto, con $(\boldsymbol{v}_1, T_1, p_1, \boldsymbol{q}_1)$ e $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}, T_1 + T, p_1 + p, \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q})$ due eventuali soluzioni delle equazioni che reggono il problema in questione, nella classe sopra precisata, soggette alle stesse condizioni iniziali e alla frontiera Σ e supposto assegnate la forza di massa $\boldsymbol{b}$, il supply di calore s ed il valore $\bar{p}$ che compete alla pressione per $r \to \infty$; la prima soluzione rappresenta il moto che diremo imperturbato, la seconda il moto perturbato.

Per il primo moto ammetteremo ovviamente valide le su esposte condizioni di limitatezza e di convergenza all'infinito; per quello perturbato, invece, basterà richiedere che, per $r > \bar{r}$, la sua velocità $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}$ sia del tipo $O(r)$, mentre temperatura e vettore flusso di calore possono essere del tipo $O(r^k)$ assieme ai loro gradienti: rot $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v})$ e $p_1 + p$ soddisferanno condizioni analoghe al moto imperturbato.

Mantenendo dunque le stesse notazioni di [1] e con lo stesso significato dei simboli, si dimostra che la soluzione differenza $(\boldsymbol{v}, T, p, \boldsymbol{q})$ (rappresentante la perturbazione) soddisfa il seguente sistema di equazioni:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 , \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \,\mathrm{rot\,rot}\, \boldsymbol{v} - \alpha T \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

$$c\rho_0 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T_1 \cdot \boldsymbol{v} + \nabla T \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} \tag{1.3}$$

$$\tau \left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{q}_1)\, \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{q})(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) - \right. \\ \left. - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \times \boldsymbol{q} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{q}_1 \right) = -\boldsymbol{q} - \chi \nabla T \tag{1.4}$$

corredato dai seguenti dati iniziali e alla frontiera:

$$\boldsymbol{v}(P, 0) = 0 \quad , \quad T(P, 0) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{q}(P, 0) = 0 \quad , \quad P \in \Omega$$

a) $\quad \boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad \mathrm{T}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad (\mathrm{P}, t) \in \Sigma \times [0, t']$

$\quad$ e $\quad \boldsymbol{q}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad (\mathrm{P}, t) \in \Sigma_1$ (3) $\times [0, t']$

oppure

b) $\quad \boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{q}(\mathrm{P}, t) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad (\mathrm{P}, t) \in \Sigma \times [0, t']$

$\quad$ e $\quad \boldsymbol{q}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad \mathrm{T}(\mathrm{P}, t) = 0 \quad , \quad (\mathrm{P}, t) \in \Sigma_1 \times [0, t']$

Se dimostreremo che $\boldsymbol{v} = \mathrm{T} = \boldsymbol{q} = 0$ in $\Omega \times [0, t']$ allora anche $p = 0$ e il teorema di unicità sarà completamente provato.

2. Allo scopo, si possono ripetere tutti i passaggi che hanno condotto all'equazione (2.10) della Nota precedente: quindi, posto per maggiore semplicità:

$$\mathrm{A} = \frac{v^2}{2} + \frac{c\rho_0}{2}\chi \mathrm{T}^2 + \frac{\tau}{2} q^2 \tag{2.1}$$

e dopo aver anche messo in evidenza al primo membro il termine $(\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ (4), la riscriviamo così:

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot \left[\mathrm{A}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{\rho_0} p \boldsymbol{v} + \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + \chi \mathrm{T} \boldsymbol{q}\right] = \tag{2.2}$$

$$= -\nu \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{v} + \frac{\tau}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q} + \mathrm{O}(v^2) + \mathrm{O}(\mathrm{T}^2) + \mathrm{O}(q^2)\,.$$

dove, com'è noto, $\mathrm{O}(v^2)$ significa un termine limitato da $\mathrm{N}v^2$ essendo $\mathrm{N}, \mathrm{N} > 0$, un numero indipendente da $\nabla \boldsymbol{v}_1$ e analogo significato hanno $\mathrm{O}(\mathrm{T}^2)$ e $\mathrm{O}(q^2)$.

Ciò premesso, introduciamo la seguente funzione:

$$g(\mathrm{P}, t) = \exp(-m(t + t_0) r^\gamma)\,, \qquad \gamma \in (0, 1]\,, m \geq 5\,, t_0 > 0\,. \tag{2.3}$$

che diremo funzione peso (5).

Applicando l'operatore gradiente alla (2.3), si ha:

$$\nabla g = -m(t + t_0)\gamma r^{\gamma - 1} g \nabla r$$

(3) Cfr. [1]: indicato al solito con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a Σ diretto verso l'esterno di Ω, Σ_1 rappresenta la parte di Σ in cui $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} < 0$.

(4) Osserviamo che tale termine, proveniente dall'equazione (2.5) della nota su citata, era del tipo $\mathrm{O}(v^2)$ in quanto, trattandosi di un dominio limitato e di soluzioni classiche, $\nabla \boldsymbol{v}_1$ era limitato.

(5) Per una applicazione del metodo della funzione peso, si veda per esempio [2] e, per una descrizione più dettagliata, [3]: la presenza di una tale funzione, rapidamente decrescente all'infinito ci ha permesso di alleggerire di parecchio le condizioni di convergenza all'infinito cui, altrimenti, dovrebbero soddisfare le variabili che compaiono nelle equazioni considerate.

e quindi, indicato con h la più piccola distanza di P_0 dai punti di Σ ed essendo $\gamma - 1 \leq 0$ si ha subito la maggiorazione:

$$|\nabla g| \leq m\gamma h^{\gamma-1}(t'+t_0)\, g = nn_1(t'+t_0)\, g = ng \tag{2.4}$$

dove si è posto $n_1 = \gamma h^{\gamma-1}$ e $n = mn_1(t'+t_0)$.

Introduciamo ora la seguente identità ($(\nabla \boldsymbol{v}_1)^T$ rappresenta il trasposto di $(\nabla \boldsymbol{v}_1)$):

$$\begin{aligned} g(\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} &= g(\nabla \boldsymbol{v}_1)^T \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = g(\nabla(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}) - \\ &- g(\nabla \boldsymbol{v})^T \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v} = \nabla\cdot[g(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}] - \nabla g\cdot(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - \\ &- g\boldsymbol{v}_1\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\left[g(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - g\frac{v^2}{2}\boldsymbol{v}_1\right] - \\ &- \nabla g\cdot(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} + \nabla g\cdot\frac{v^2}{2}\boldsymbol{v}_1 - g\boldsymbol{v}_1\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Posto:

$$B = \nu\nabla g\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) + \frac{\tau}{2}\, g \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q} + g\boldsymbol{v}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \nu g \operatorname{rot}^2\boldsymbol{v} \tag{2.6}$$

in base alla diseguaglianza di Cauchy [6] e ricordando la (2.4), per B segue subito la seguente stima:

$$\begin{aligned} B \leq g &\left[\xi\left(\frac{\nu n}{2} + \frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right) - \nu\right] \operatorname{rot}^2\boldsymbol{v} + \\ &+ \nu n g\frac{v^2}{2\xi} + \frac{\tau}{4}\, g\,|q_1|^2\frac{q^2}{\xi} + g\,|v_1|^2\frac{v^2}{2\xi} \end{aligned} \tag{2.7}$$

per cui, scelto ξ in modo che risulti $\left(\frac{\nu n}{2} + \frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right)\xi - \nu \leq 0$, per le assunzioni di limitatezza su $\boldsymbol{q}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$, resta:

$$B \leq O\left(g\frac{v^2}{2}\right) + O\left(g\frac{q^2}{2}\right). \tag{2.8}$$

Arrivati a questo punto, moltiplichiamo la (2.2) per g; tenendo presente le relazioni $g\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot(g\boldsymbol{u}) - \nabla g\cdot\boldsymbol{u}$ dove $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(P, t)$ è un vettore qualunque e $g\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial gA}{\partial t} - A\frac{\partial g}{\partial t}$, sostituendo poi le (2.5) e (2.6) in (2.2)

(6) Se a e b sono due quantità (scalari o vettoriali) si ha sempre:

$$|a\cdot b| = \left|\frac{a}{\sqrt{\xi}}\cdot\sqrt{\xi}\, b\right| \leq \frac{a^2}{2\xi} + \frac{\xi b^2}{2}$$

con ξ parametro positivo.

ricordando anche che, in quanto la g è limitata in Ω, è sempre possibile scambiarla con il simbolo O, perveniamo infine all'equazione:

$$(2.9)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\, gA = A\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\right) + \nabla g\cdot\frac{p}{\rho_0}\,\boldsymbol{v} + \chi\nabla g\cdot Tg + B -$$

$$-\nabla\left[gA(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{\rho_0}\,pg\boldsymbol{v} + \nu g \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + \chi g\, T\boldsymbol{q} + g(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - g\frac{v^2}{2}\,\boldsymbol{v}_1\right] +$$

$$+ O(gv^2) + O(gT^2) + O(gq^2) + \nabla g\cdot\left[(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} + \frac{v^2}{2}\,\boldsymbol{v}_1\right].$$

Si osservi intanto che, per la richiesta limitatezza di $\boldsymbol{v}_1$ e per (2.4), l'ultimo termine al secondo membro di (2.9) è del tipo $O(gv^2)$ e inoltre $\chi\nabla g\cdot T\boldsymbol{q} = O(gT^2) + O(gq^2)$; per le proprietà di cui gode il simbolo O discende infine che:

$$O(gv^2) + O(gT^2) + O(gq^2) = O\left(g\,\frac{v^2}{2}\right) +$$

$$+ O\left(g\,\frac{c\rho_0\chi T^2}{2}\right) + O\left(g\,\frac{\tau}{2}\,q^2\right) = O(gA).$$

Indicato con $\Omega_{\bar r}$ l'intersezione di Ω con una sfera di raggio $\bar r$, contenente Ω_0, integriamo la (2.9) su $\Omega_{\bar r}$, inserendo in luogo di B la sua stima (2.7) e tenendo anche conto delle osservazioni di poc'anzi; applicando il teorema della divergenza, in virtù delle condizioni alla frontiera Σ ((1.5) *a*) oppure *b*)) e ricordando la (2.8), ci si riduce alla diseguaglianza:

$$(2.10)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\bar r}} gA\, d\Omega_{\bar r} \leq N_1 \int_{\Omega_{\bar r}} gA\, d\Omega_{\bar r} + \int_{\Omega_{\bar r}} A\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\right) d\Omega_{\bar r} +$$

$$+ \int_{\Omega_{\bar r}} \frac{1}{\rho_0}\,\nabla g\cdot p\boldsymbol{v}\, d\Omega_{\bar r} - \int_{\partial\Omega_{\bar r}} g\left[A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{\rho_0}\,p\boldsymbol{v} + \nu \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} +\right.$$

$$\left. + \chi T\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - \frac{v^2}{2}\,\boldsymbol{v}_1\right]\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma$$

dove N_1 è una costante positiva.

Per le assunzioni su $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)$ (7), si ha:

$$(2.11)\qquad \frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) \leq r^{\gamma}\,(t'+t_0)\, g\left(-\frac{1}{t'+t_0} + \gamma N\right) m\,, \qquad N > 0\,.$$

(7) Si noti che $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1| \leq Nr$ vale per ogni r; infatti, tenendo presente che per $r > \bar r$, $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1| \leq Mr$ e per $r \leq \bar r$ $|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1| \leq L = \frac{Lr}{r} \leq \frac{L}{h}\,r$, basta scegliere $N = \max\left(M, \frac{L}{h}\right)$.

Pertanto, scegliendo $\gamma \leq [N(t'+t_0)]^{-1}$ il secondo integrale al secondo membro di (2.10) risulta non positivo; allora passiamo al limite per $\bar{r} \to \infty$; posto:

$$E = \int_\Omega gA \, d\Omega \tag{2.12}$$

e tenendo presente che $|\nabla g| \leq m\gamma (t'+t_0) r^{\gamma-1} g$, da (2.10) ricaviamo:

$$\frac{d}{dt} E \leq N_1 E + \int_\Omega \frac{m\gamma (t'+t_0)}{\rho_0} r^{\gamma-1} g \, |p| \, |\boldsymbol{v}| \, d\Omega . \tag{2.13}$$

In base alla diseguaglianza di Cauchy, si ha:

$$\frac{m\gamma (t'+t_0)}{\rho_0} r^{\gamma-1} g \, |p| \, |\boldsymbol{v}| \leq \frac{m}{\rho_0} \gamma^2 \frac{r^{2(\gamma-1)}}{2} g \, |p|^2 + \frac{m}{\rho_0} (t'+t_0)^2 g \frac{v^2}{2} \tag{2.14}$$

per cui (2.13) diventa:

$$\frac{d}{dt} E \leq N_2 E + \frac{m\gamma^2}{2\rho_0} \int_\Omega g r^{2(\gamma-1)} |p|^2 \, d\Omega , \quad \text{con } N_2 = N_1 + \frac{m}{\rho_0} (t'+t_0)^2 \text{ (8)}. \tag{2.15}$$

La (2.15) coincide proprio con la (13) di [2] a patto di leggere N_2, p e $\boldsymbol{v}$ in luogo di K_1, ∇p e $\boldsymbol{u}$: così, procedendo come in [2] segue $E \equiv 0$, da cui $\boldsymbol{v} = T = \boldsymbol{q} = 0$ in $\Omega \times [0, t']$ e quindi, ragionando come in [1], anche $\nabla p = 0$, cioè p costante; tenendo però presente che p è nulla all'infinito, discende subito $p = 0$ e dunque il teorema è completamente dimostrato.

Non sarà certo inutile osservare che il teorema si poteva anche dimostrare sotto l'assunzione $|\nabla \boldsymbol{v}_1 + \nabla \boldsymbol{v}_1^T| \leq N$, $r > \bar{r}$, sostitutiva dell'assunzione di limitatezza della velocità $\boldsymbol{v}_1$ del moto imperturbato, e mantenendo inalterate tutte le altre.

In questo caso, infatti, come in [1], $(\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = O(v^2)$ e quindi non è necessario metterlo in evidenza in (2.2); la (2.9), allora, si semplifica in quanto vengono a mancare gli ultimi due termini e $\nabla \cdot \left[g(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} - g \frac{v^2}{2} \boldsymbol{v}_1 \right]$.

Inoltre B si riduce a:

$$B = \nu \nabla g \cdot (\text{rot } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) + \frac{\tau}{2} g \text{ rot } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q} - \nu g \text{ rot}^2 \boldsymbol{v}$$

per cui, scelto ξ in modo che $\left(\frac{\nu n}{2} + \frac{\tau}{4} \right) \xi - \nu \leq 0$, si ha subito la (2.8),

(8) È infatti $\int_\Omega \frac{m}{2\rho_0} (t'+t_0)^2 g v^2 \, d\Omega \leq \frac{m}{\rho_0} (t'+t_0)^2 \int_\Omega gA \, d\Omega = \frac{m}{\rho_0} (t'+t_0)^2 E$.

senza però dover ricorrere alla limitatezza di $\boldsymbol{v}_1$. Dopo, la dimostrazione è la stessa. Dal punto di vista fisico, comunque, la prima impostazione in cui, tolta ogni ipotesi di limitatezza sulla parte simmetrica del gradiente di velocità e sotto ipotesi molto larghe sulla sua parte antisimmetrica, viene però richiesta la limitatezza della velocità $\boldsymbol{v}_1$, è senz'altro più plausibile.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. FRANCHI (1978) – *Un teorema di unicità per le equazioni di Boussinesq modificate in base all'equazione di Cattaneo-Fox*, «Accad. Naz. Lincei», vol. LXIV fasc. n. 3, 273–279.

[2] S. RIONERO e G. P. GALDI (1976) – *On the uniqueness of viscous fluid motions*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», *62*, 295–301.

[3] S. RIONERO e G. P. GALDI – *The weight function approach to uniqueness of viscous flows in bounded domains*, In corso di stampa su «Arch. Rat. Mech Anal.».

[4] B. STRAUGHAN (1977) – *Uniqueness and continuos dependence theorems for the conduction-diffusion solution to the Boussinesq equations on ou exterior domain*, «Journ. of Math. Anal. and Appl.», *57*, 203–233.

[5] D. GRAFFI (1960) – *Sul teorema di unicità nella dinamica dei fluidi*, «Ann. Mat. Pura Appl.», *50*, 379–387.