
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALESSANDRO SCARSELLI

Sui gruppi finiti inseparabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.6, p. 244–246.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_6_244_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Sui gruppi finiti inseparabili* (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — This Note is a summary of some results concerning inseparable finite groups.

Il gruppo finito G è detto *inseparabile* se non si spezza su alcun sottogruppo normale proprio, ovvero se non esistono un sottogruppo normale N e un sottogruppo H tali che $G = NH$, $N \cap H = \langle 1 \rangle$ e $G \neq N \neq \langle 1 \rangle$. Uno dei maggiori motivi di interesse verso lo studio dei gruppi inseparabili, consiste nel fatto che ogni gruppo finito G ammette una fattorizzazione della forma $G = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ con $A_n A_{n-1} \cdots A_{j+1}$ normale nel sottogruppo $A_n A_{n-1} \cdots A_{j+1} A_j$ di G , $(A_n A_{n-1} \cdots A_{j+1}) \cap A_j = \langle 1 \rangle$ e ogni A_j inseparabile. Gli A_j si dicono i fattori inseparabili di G . Ogni gruppo finito G può perciò costruirsi attraverso una successione di prodotti semidiretti con gruppi inseparabili. Per qualche importante classe di gruppi si conoscono i fattori inseparabili; per esempio i fattori inseparabili di un gruppo abeliano sono gruppi ciclici primari e ciò accade anche nel caso ben più generale che il gruppo sia risolubile a sottogruppi di Sylow abeliani. Per i gruppi nilpotenti o più in generale supersolubili, i fattori inseparabili sono gruppi primari.

Già un tentativo di classificazione dei p -gruppi inseparabili sembra davvero indispensabile. Comunque H. Bechtell [1], mette in luce un legame molto stretto fra le proprietà di spezzamento di un gruppo finito G ed il modo nel quale è contenuto in G il suo residuo $G_{\mathcal{E}}$, rispetto alla formazione $\mathcal{E}$ dei gruppi a sottogruppi di Sylow abeliani elementari (ovvero l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G a quoziente in $\mathcal{E}$). Precisamente G si spezza sul sottogruppo normale N se e solo se G ammette una fattorizzazione $G = NS$ con S supplemento minimale di N in G e $G_{\mathcal{E}}$ prodotto semidiretto di $N \cap G_{\mathcal{E}}$ con $S_{\mathcal{E}}$. Per quanto riguarda il caso in cui G sia un p -gruppo, è chiaro che $G_{\mathcal{E}}$ non è altro che il sottogruppo di Frattini di G . Il Bechtell [1], poggiandosi su una caratterizzazione di Ja. G. Berkovič [3] dei p -gruppi a sottogruppo di Frattini metaciclico, determina i p -gruppi inseparabili a sottogruppo di Frattini metaciclico per $p \geq 5$. In tal caso G stesso è metaciclico e un p -gruppo metaciclico (con $p \geq 3$) della forma

$$G = \langle a, b \mid a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, b^{-1}ab = a^k, t \geq 0, \\ k^{p^m} - 1 \equiv p^t(k - 1) \equiv 0 \pmod{p^n}, |G| = p^{n+m} \rangle$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 dicembre 1978.

è inseparabile se e solo se il suo esponente è p^{m+n-t} con $0 < t < n$, $m > t$ e $0 < k-1 < p^t$. Nel caso $p=3$, esistono anche p -gruppi a sottogruppo di Frattini metaciclico che non sono metaciclici e che risultano inseparabili. Essi sono di classe massimale, come per esempio

$$G = \langle a, b, c \mid a^9 = b^3 = c^3 = 1, \\ [a, b] = 1, [a, c] = b, [b, c] = a^3, c^3 = a^3 \rangle.$$

Per $p=2$ invece non esiste una caratterizzazione adeguata per i p -gruppi a sottogruppo di Frattini metaciclico e le classi note si riducono a quelle indicate dalla O. Taussky [5].

Esistono anche gruppi risolubili inseparabili che non sono p -gruppi. Tale è, ad esempio,

$$G = \langle a, b, c, d \mid a^4 = c^3 = 1, a^2 = b^2 = d^2, b^{-1}ab = a^{-1}, \\ c^{-1}ac = b, c^{-1}bc = a^{-1}b, d^{-1}ad = b, d^{-1}bd = a, d^{-1}cd = c^{-1} \rangle,$$

che è una estensione del gruppo dei quaternioni tramite il gruppo simmetrico su tre oggetti e che chiameremo l'esempio del Bechtell.

Lo stesso Bechtell, sempre in [1], fornisce alcuni risultati generali riguardo a tali gruppi e si occupa in modo particolare del caso in cui l' $\mathcal{E}$ -residuo è un p -gruppo. Egli prova (Teorema 2.4 in [1]) che il gruppo risolubile G è inseparabile se e solo se:

1) Se N è un sottogruppo normale proprio di G , S è un supplemento minimale di N e $\langle 1 \rangle \subsetneq N \cap G_{\mathcal{E}} \subsetneq G_{\mathcal{E}}$, allora $N \cap G_{\mathcal{E}} \cap S_{\mathcal{E}} = \langle 1 \rangle$.

2) Ogni elemento di periodo primo di G è contenuto nell'intersezione dei sottogruppi normali massimali di G .

3) Ogni sottogruppo normale minimale di G è contenuto nel sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$ di G .

Riguardo al caso in cui $G_{\mathcal{E}}$ è un p -gruppo (indicheremo i gruppi soddisfacenti tale condizione come appartenenti alla classe α_p) egli prova (Teorema 3.3 in [1]) che:

- 1) $\Phi(G) \subsetneq G_{\mathcal{E}}$;
- 2) $\Phi(P) \ntriangleleft G$, per un p -sottogruppo di Sylow P di G ;
- 3) $G_{\mathcal{E}}$ non è ciclico;
- 4) $[G_{\mathcal{E}} : \Phi(G)] \geq p^2$;
- 5) $G_{\mathcal{E}} = F(G)$ se $F(G)$, il sottogruppo di Fitting di G , è metaciclico;
- 6) Se $[G_{\mathcal{E}} : \Phi(G)] = p^2$, allora $G_{\mathcal{E}}/\Phi(G)$ è un sottogruppo normale minimale di $G/\Phi(G)$.

In [2], lo stesso autore caratterizza quello che abbiamo appunto chiamato l'esempio del Bechtell, come l'unico gruppo risolubile non nilpotente inseparabile in cui l' $\mathcal{E}$ -residuo è un p -gruppo metaciclico.

L'autore della presente Nota ha approfondito lo studio dei gruppi appartenenti alla classe α_p . I risultati principali da esso ottenuti consistono nei teoremi 1, 2, 3 sotto riportati la cui dimostrazione comparirà in un lavoro in corso di stampa [4].

TEOREMA 1. - Sia $G \in \alpha_p$ e P un p -sottogruppo di Sylow di G , allora:

- (i) $F(G)$ è un p -gruppo;
- (ii) G/G' è un p -gruppo;
- (iii) $F(G)/G_\infty \subseteq Z(G/G_\infty)$;
- (iv) $G_\infty = \Phi(P)F(G')$;
- (v) $F(G')$ è un p -sottogruppo di Sylow di G' ;
- (vi) G_∞ contiene ogni elemento di G di periodo p ;
- (vii) Se H è un p' -sottogruppo di Hall di G , allora $G = N_G(H)G_\infty$ e $N_G(H) \cap G_\infty = C_{G_\infty}(H)$.

TEOREMA 2. - Sia $G \in \alpha_p$, allora:

- (i) $C_G(G_\infty/\Phi(G)) = F(G)$, cosicché $G/F(G)$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi indotti da G in $G_\infty/\Phi(G)$;
- (ii) $[G_\infty : \Phi(G)] \geq p^p$;
- (iii) Se $[G_\infty : \Phi(G)] = p^p$, allora $G_\infty/\Phi(G)$ è un sottogruppo normale minimale di $G/\Phi(G)$;
- (iv) Se $[G_\infty : \Phi(G_\infty)] = p^p$, allora $\Phi(G) = \Phi(G_\infty)$ e $G_\infty = F(G')$.

TEOREMA 3. - Un gruppo risolubile G , tale che G_∞ è un 3-gruppo dotato di una catena normale a fattoriali ciclici di lunghezza 3, si spezza su qualche sottogruppo normale proprio.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BECHTELL (1976) - *Inseparable finite groups*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 216, 47-60.
- [2] H. BECHTELL (1977) - *Inseparable finite groups II*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 64, 25-29.
- [3] JA. G. BERKOVIČ (1971) - *A generalization of the theorems of Hall and Blackburn and their applications to nonregular p -groups*, « Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. », 35, 800-830; « Math. USSR Izv. », 5, 815-844.
- [4] A. SCARSELLI (1978) - *On a class of inseparable finite groups*, « Journal of Algebra » (in corso di stampa).
- [5] O. TAUSKY (1937) - *Remark on the class field tower*, « Journal London Math. Soc. », 12, 82-85.