
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SEBASTIANO GIAMBÒ, ANTONIO GRECO

**Sur l'existence et l'unicité du problème de Cauchy
pour un fluide relativiste chargé et conducteur de
chaleur**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 65 (1978), n.3-4, p.
128–131.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_3-4_128_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teorie relativistiche. — *Sur l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour un fluide relativiste chargé et conducteur de chaleur.*
Nota (*) di SEBASTIANO GIAMBÒ e ANTONIO GRECO, presentata dal Socio D. GRAFFI.

RIASSUNTO. — Si dimostra il carattere iperbolico non stretto, nel senso di Leray-Chyà, del sistema della magnetoidrodinamica relativistica per un fluido conduttore del calore con conduttività infinita. Di conseguenza resta provato, in una opportuna classe di Gevrey, il teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per il predetto sistema.

1. LES EQUATIONS DU CHAMP

Un fluide relativiste chargé conducteur de chaleur, de perméabilité magnétique μ et de conductivité infinie, est décrit par le tenseur énergie-impulsion [1]

$$T^{\alpha\beta} = (rf + \mu h^2) u^\alpha u^\beta - \left\{ p + \mu \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) h^2 \right\} g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta,$$

où r est la densité propre de matière correspondant au nombre spécifique de particules, f est l'indice du fluide, p la pression, u^α le vecteur vitesse unitaire: $u^\alpha u_\alpha = 1$, h_α le vecteur champ magnétique purement spatiale: $u^\alpha h_\alpha = 0$, et $h^2 = -h^\alpha h_\alpha > 0$.

Les équations du champ sont données par les équations de conservation de l'énergie-impulsion

$$(1) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0,$$

∇_α étant la dérivation covariante par rapport à la métrique donnée $g^{\alpha\beta}$; l'équation de conservation du vecteur courant de chaleur

$$(2) \quad \nabla_\alpha (q^* u^\alpha + q^\alpha) = 0, \quad q^\alpha u_\alpha = 0,$$

où $q^* u^\alpha$ et q^α sont respectivement le courant de chaleur de convection et le courant de chaleur de conduction; l'équation de conservation de la densité matérielle propre « totale »

$$(3) \quad \nabla_\alpha (\eta u^\alpha) = 0, \quad \eta = r + q^*;$$

les équations de Maxwell, qui dans les conditions considérées s'écrivent

$$(4) \quad \nabla_\alpha (u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha) = 0.$$

(*) Pervenuta all'Accademia l'1 settembre 1978.

Les variables thermodynamiques sont liées par la relation

$$rT \, dS = r \, df - dp - \frac{\mu(1-\mu)}{2} \, dh^2$$

où T et S désignent respectivement la température propre et l'entropie spécifique du fluide, et, par la suite, r , T et h^2 seront prises comme variables thermodynamiques indépendantes. On complète le système d'évolution en ajoutant la loi de conduction de la chaleur [2]:

$$(5) \quad q_\alpha + \chi u^\beta (\partial_\beta q_\alpha - \partial_\alpha q_\beta) + k u^\beta [\nabla_\beta (T u_\alpha) - \nabla_\alpha (T u_\beta)]$$

où χ et k sont des coefficients positifs.

Des équations écrites on peut déduire, de façon usuelle, l'équation thermodynamique

$$(6) \quad r T u^\alpha \partial_\alpha S + f \nabla_\alpha q^\alpha = 0$$

et le système aux lignes de courant

$$(7) \quad (rf + \mu h^2) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \left[p + \mu \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) h^2 \right] + \\ + \mu u^\alpha u^\beta h^\sigma \nabla_\sigma h_\alpha - \mu h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta - \mu h^\beta \nabla_\alpha h^\alpha = 0$$

avec $\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta$.

Le système d'évolution est équivalent au système constitué par les équations (2), (3), (4), (5), (6) et (7) dans les inconnues u^α , h^α , q^α , r , T et q^* ; que on appellera système (S).

2. CARACTÈRE QUASI-LINÉAIRE DE (S)

On suppose dans la suite vérifiées les hypothèses thermodynamiques suivantes

$$(8) \quad \rho = \rho(p, h^2), \quad \chi p'_T > k p'_r, \quad r T S'_T > p'_T$$

où $\rho = T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$.

Dans la métrique donnée le système (S) est quasi-linéaire pour le choix suivant des indices de Leray [3]:

$$m(u^\alpha) = m(h^\alpha) = m(q^\alpha) = m(r) = m(T) = m(q^*) = 1$$

$$n(2) = n(3) = n(4) = n(5) = n(6) = n(7) = 0$$

où les nombres en parenthèse se rapportent évidemment aux équations correspondantes. La partie principale de (S), d'ordre $\sum_k m_k - \sum_j n_j = 15$ est donnée par

$$P(I) = [P_0(I)]^5 [P_1(I)]^2 [P_2(I)] [P_3(I)]$$

avec

$$\begin{aligned} P_0(l) &= u^\alpha l_\alpha \\ P_1(l) &= (rf + \mu h^2) (u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu (h^\alpha l_\alpha)^2 \\ P_2(l) &= (\chi p'_T - k p'_r) (u^\alpha l_\alpha)^2 + k p'_r l^\alpha l_\alpha \\ P_3(l) &= rf (r T S'_T - p'_T) (u^\alpha l_\alpha)^4 + \\ &\quad + \{ (rf p'_T + \mu r T h^2 S'_T) (u^\alpha l_\alpha)^2 - \mu p'_T (h^\alpha l_\alpha)^2 \} l^\alpha l_\alpha. \end{aligned}$$

L'équation $P(l) = 0$ avec $l_\alpha = \partial\varphi/\partial x^\alpha$ détermine les variétés caractéristiques du système (S), d'équations locales $\varphi(x^\alpha) = 0$, qui sont:

- les ondes matérielles, solution de $P_0(\varphi_\alpha) = 0$;
- les ondes d'Alfvén, solutions de $P_1(\varphi_\alpha) = 0$;
- les ondes thermiques, solutions de $P_2(\varphi_\alpha) = 0$;
- les ondes magnétohydrodynamiques, solutions de $P_3(\varphi_\alpha) = 0$.

En se rappelant des ondes gravitationnelles données par $G(\varphi_\alpha) = g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta = 0$, il est facile de voir que, sous les hypothèses thermodynamiques (8):

- I) les variétés caractéristiques sont orientées dans le temps;
- II) les operateurs différentiels qui leur sont associés, ainsi que les produits de ceux associés respectivement à P_0 et P_2 , à P_0 et P_3 sont hyperboliques stricts.

3. CARACTÈRE HYPERBOLIQUE NON-STRICT DE (S)

Le système (S) est hyperbolique non-strict au sens de Leray, comme on peut le vérifier en appliquant le critère de M. Y. Choquet [4]:

a) le polynôme caractéristique $P(l)$ est produit de $t = 9$ polynômes hyperboliques stricts:

$$\begin{aligned} C_1(l) = C_2(l) = C_3(l) = P_0(l) \quad , \quad C_4(l) = C_5(l) = A(l) , \\ C_6(l) = C_7(l) = B(l) \quad , \quad C_8(l) = P_0(l) P_2(l) \quad , \quad C_9(l) = P_0(l) P_3(l) \end{aligned}$$

avec

$$A(l) = \omega u^\alpha l_\alpha + h^\alpha l_\alpha \quad , \quad B(l) = \omega u^\alpha l_\alpha - h^\alpha l_\alpha \quad , \quad \omega = [(rf + \mu h^2) \mu^{-1}]^{1/2} ;$$

b) les cônes définis par $C_i(l) = 0$ ($i = 1, \dots, 9$) contiennent dans leur intérieur le cône fondamental G ;

c) si d_i est le degré de $C_i(l)$, alors $\sup_i d_i = 5 > \sup_k m_k - \inf_j n_j = 1$.

Les données de Cauchy sur une hypersurface Σ d'équation locale $x^0 = 0$ sont pour le système (S)

$$\{u^\alpha, h^\alpha, q^\alpha, r, T, q^*\}_{x_0=0}.$$

Si les données de Cauchy appartiennent à la classe de Gevrey d'indice $\alpha = \frac{t}{t-1} = \frac{9}{8}$, le système (S) admet une solution unique dans la classe de Gevrey de même indice, dont le domaine d'influence est le cône fondamentale G de la métrique.

4. RÉDUCTION DE L'INDICE

D'après [4], si tous les mineurs des éléments du déterminant P contiennent en facteur un même polynôme $f(l)$, on peut obtenir pour le système (S) une forme diagonale simplifiée. Si le polynôme

$$\hat{P}(l) = \frac{P(l)}{f(l)}$$

est produit de t' facteurs hyperboliques stricts, le système admet une solution unique dans la classe de Gevrey d'indice $\alpha' = \frac{t'}{t'-1}$.

Pour le système (S), un calcul direct permet d'établir que tous les mineurs de P contiennent en facteur $P_0^4(l) P_1(l)$. On obtient ainsi

$$\hat{P}(l) = P_1'(l) P_2'(l) P_3'(l) P_4'(l)$$

avec

$$P_1'(l) = P_0(l) P_3(l), \quad P_2'(l) = A(l), \quad P_3'(l) = B(l), \quad P_4' = P_2(l),$$

où les $t' = 4$ facteurs $P_i'(l)$ ($i = 1, \dots, 4$) sont des polynômes hyperboliques stricts. Les conditions du critère d'hyperbolicité non-strict sont encore vérifiées étant $\sup_i d_i = 5 > \sup_k m_k - \inf_j n_j = 1$.

En conclusion on peut affirmer que, sous les hypothèses thermodynamiques (8), le système (S) est physiquement équivalent à un système hyperbolique non-strict admettant, relativement au problème de Cauchy, une solution unique dans la classe de Gevrey d'indice $\alpha' = (4/3)$.

REFERENCES

- [1] S. GIAMBÒ e A. GRECO (1978) - *On the generalized relativistic magnetohydrodynamicx for an heat-conducting fluid*, « Rend. Circolo Mat. Di Palermo », ser. II, T. XXVII.
- [2] A. GRECO e S. GIAMBÒ (1976) - *On the evolution system for a relativistic inviscid fluid with heat conduction*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, LX.
- [3] J. LERAY (1953) - *Hyperbolic differential equations*, « Inst. for advanced study », Princeton 1953 (Notes minéographiées).
- [4] Y. CHOQUET-BRUHAT (1966) - « J. Math. Pures et Appl. », 45, 371-286.