Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Crupi, Andrea Donato

Su una classe di equazioni conservative ed iperboliche completamente eccezionali e compatibili con una legge di conservazione supplementare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.3-4, p. 120–127.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_3-4_120_0>

Fisica matematica. — *Su una classe di equazioni conservative ed iperboliche completamente eccezionali e compatibili con una legge di conservazione supplementare* (*). Nota (**) di GIOVANNI CRUPI e ANDREA DONATO, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We characterize a set of second order hyperbolic conservative equations that are both compatible with a supplementary conservation law and completely exceptional.

In una recente Nota [1] è stata considerata un'equazione del secondo ordine, conservativa ed iperbolica, del tipo

$$u_{tt} + \partial_i F^i(u_t, u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

dove u è la funzione incognita, $u_t = \partial_t u = \partial u/\partial t$ e $u_k = \partial_k u = \partial u/\partial x_k$.

Tra l'altro, è stata precisata la struttura che debbono avere le funzioni F^i affinché la (1) ammetta una legge supplementare di conservazione della forma (vedi [2]):

$$\partial_t h + \partial_i h^i = 0 \tag{2}$$

con densità di energia convessa. E precisamente si è dimostrato che la (1) è compatibile con la (2) se:

$$h = h_1(\varnothing) + h_2(v^i) \tag{3}$$

$$F^i = (1/h_1'')(-\partial h_2/\partial v^i + \psi^i(\varnothing)) \tag{4}$$

dove per brevità si è posto

$$u_t = \varnothing \quad ; \quad v^i = \partial_i u , \tag{5}$$

mentre le $\psi^i(\varnothing)$ indicano delle arbitrarie funzioni di integrazione.

Nella presente Nota si riprende l'analisi dell'equazione (1) limitatamente al caso $i = 1, 2$, allo scopo di ricercare:

i) la struttura delle F^i che la rendono completamente eccezionale;

ii) le eventuali F^i che la rendono compatibile sia con una legge supplementare di conservazione che con la condizione di completa eccezionalità.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di ricerca del C.N.R., Gruppo Nazionale per la Fisica-Matematica.

(**) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1978.

La (1) soddisfacente la ii) risulta completamente eccezionale ma, in generale, non è strettamente eccezionale. Acquista tale proprietà solo nel caso unidimensionale.

Nell'ultima parte del lavoro si ha occasione di proporre una naturale generalizzazione della (1) che conserva le predette proprietà.

N. 1. La (1), dopo le (5), può essere posta nella forma

$$u_{tt} + F^i_\varnothing \,\partial_i u_t + F^i_{v^k} \,\partial_i u_k = 0 \tag{6}$$

dove

$$F^i_\varnothing = \partial F^i/\partial u_t \qquad F^i_{v^k} = \partial F^i/\partial u_k\,. \tag{7}$$

Supponendo che le derivate di ordine massimo della u subiscano un salto attraverso la superficie $\varphi(x^i, t) = 0$ ed applicando, nel modo usuale, la teoria dei fronti d'onda di discontinuità, dalla (6) si ottiene il seguente polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - F^i_\varnothing \, n_i \lambda + F^i_{v^k} \, n_i n_k = 0\,, \tag{8}$$

dove

$$\lambda = -\varphi_t/|\text{grad}\,\varphi| \qquad n_i = \varphi_i/|\text{grad}\,\varphi|\,. \tag{9}$$

Richiedendo che la (1) sia completamente eccezionale si ha

$$\delta\lambda = (\lambda_\varphi)_{\varphi+} - (\lambda_\varphi)_{\varphi-} = 0 \tag{10}$$

per ogni radice λ di (8). Nel caso in esame la (10) comporta

$$-\lambda\lambda_\varnothing + \lambda_{v^i} n_i = 0\,. \tag{11}$$

D'altra parte, derivando rispetto a $\varnothing$ e rispetto a v^i la (8) seguono le due equazioni

$$\begin{aligned} &P'(\lambda)\,\lambda_\varnothing - F^i_{\varnothing\varnothing} \, n_i \lambda + F^i_{\varnothing v^k} \, n_i n_k = 0 \\ &P'(\lambda)\,\lambda_{v^j} - F^i_{\varnothing v^j} \, n_i \lambda + F^i_{v^k v^j} \, n_i n_k = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

da cui, dopo la (11), si trae

$$\lambda^2 F^i_{\varnothing\varnothing} \, n_i - 2\,\lambda F^i_{\varnothing v^j} \, n_i n_j + F^i_{v^k v^j} \, n_i n_k n_j = 0\,. \tag{13}$$

Eliminando da quest'ultima e dalla (8) λ^2 si ottiene la seguente relazione:

$$\lambda\,(F^i_{\varnothing\varnothing} F^j_\varnothing - 2\,F^i_{\varnothing v^j})\, n_i n_j + (F^i_{v^k v^j} - F^i_{\varnothing\varnothing} F^j_{v^k})\, n_i n_k n_j = 0 \tag{14}$$

che deve essere soddisfatta qualunque sia λ. Ma ciò può accadere se e solo se

$$\begin{aligned} &(F^i_{\varnothing\varnothing} F^j_\varnothing - 2\,F^i_{\varnothing v^j})\, n_i n_j = 0 \\ &(F^i_{v^k v^j} - F^i_{\varnothing\varnothing} F^j_{v^k})\, n_i n_k n_j = 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Nel seguito, per ragioni di semplicità, considereremo il caso di due sole variabili spaziali oltre il tempo.

N. 2. In questo numero si procederà al calcolo effettivo delle F^i $(i = 1, 2)$ che rendono completamente eccezionale la (1). In tal caso le condizioni (15) conducono alle

$$\left\{\begin{array}{l} F^1_\varnothing F^1_{\varnothing\varnothing} - 2 F^1_{\varnothing v^1} = 0 \\ F^2_\varnothing F^2_{\varnothing\varnothing} - 2 F^2_{\varnothing v^2} = 0 \\ F^2_{\varnothing\varnothing} F^1_\varnothing + F^1_{\varnothing\varnothing} F^2_\varnothing - 2 F^1_{\varnothing v^2} - 2 F^2_{\varnothing v^1} = 0 \\ F^1_{v^1 v^1} - F^1_{\varnothing\varnothing} F^1_{v^1} = 0 \\ F^1_{v^2 v^2} - F^1_{\varnothing\varnothing} F^2_{v^2} = 0 \\ 2 F^1_{v^1 v^2} - F^1_{\varnothing\varnothing} F^2_{v^1} - F^1_{\varnothing\varnothing} F^1_{v^2} = 0 \\ F^2_{v^1 v^2} - F^2_{\varnothing\varnothing} F^1_{v^1} = 0 \\ F^2_{v^2 v^2} - F^2_{\varnothing\varnothing} F^2_{v^2} = 0 \\ 2 F^2_{v^1 v^2} - F^2_{\varnothing\varnothing} F^2_{v^1} - F^2_{\varnothing\varnothing} F^1_{v^2} = 0 . \end{array}\right. \tag{16}$$

Le prime tre equazioni delle (16) si possono riassumere nella

$$\partial / \partial \varnothing \, \{F^i_\varnothing F^k_\varnothing - 2 F^i_{v^k} - 2 F^k_{v^i}\} = 0 \tag{17}$$

da cui segue

$$F^i_\varnothing F^k_\varnothing - 2 F^i_{v^k} - 2 F^k_{v^i} = A^{ik} (v^1, v^2) \tag{18}$$

dove le A^{ik} sono funzioni arbitrarie di integrazione. D'altra parte, ponendo uguale a zero il discriminante del polinomio caratteristico (8), si ottiene

$$F^i_\varnothing F^k_\varnothing - 2 F^i_{v^k} - 2 F^k_{v^i} = 0 , \tag{19}$$

e perciò, se $A^{ik} = 0$, le prime tre equazioni delle (16) traducono la condizione di molteplicità per le radici di (8). In tal caso è facile verificare che le F^i soddisfacenti la (19), soddisfano anche tutte le equazioni del sistema (16). Si può concludere che per $A^{ik} = 0$ la condizione di completa eccezionalità per la (1) coincide con quella di molteplicità per λ e ciò in accordo con quanto stabilito in [3].

Nel seguito scarteremo tale caso perché esso implicherebbe la perdita della iperbolicità per l'equazione (1).

Il sistema (16) può essere integrato utilizzando opportunamente la soluzione relativa al caso di una sola variabile spaziale. In tal caso il sistema (16) si riduce alle due sole equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} F^1_\varnothing F^1_{\varnothing\varnothing} - 2 F^1_{\varnothing v^1} = 0 \\ F^1_{v^1 v^1} - F^1_{\varnothing\varnothing} F^1_{v^1} = 0 \end{array}\right.$$

la cui soluzione, già stabilita da Boillat in [4], è espressa da

$$F^1 = \frac{-a\varnothing^2 + b\varnothing + cv^1 + d}{av^1 + g} \tag{21}$$

con a, b, c, d, g costanti arbitrarie di integrazione.

La forma della soluzione (21) suggerisce di ricercare le eventuali soluzioni di (16) ponendo:

$$\begin{cases} F^1 = A\varnothing^2 + B\varnothing + C \\ F^2 = L\varnothing^2 + M\varnothing + N \end{cases} \tag{22}$$

con

$$\begin{cases} A = \dfrac{-A_1(v^2)}{A_1(v^2)\,v^1 + G_1(v^2)} & L = \dfrac{-A_2(v^1)}{A_2(v^1)\,v^2 + G_2(v^1)} \\[2ex] B = \dfrac{B_1(v^2)}{A_1(v^2)\,v^1 + G_1(v^2)} & M = \dfrac{B_2(v^1)}{A_2(v^1)\,v^2 + G_2(v^1)} \\[2ex] C = \dfrac{C_1(v^2)\,v^1 + D_1(v^2)}{A_1(v^2)\,v^1 + G_1(v^2)} & N = \dfrac{C_2(v^1)\,v^2 + D_2(v^1)}{A_2(v^1)\,v^2 + G_2(v^1)} \end{cases} \tag{23}$$

dove A_i, B_i, C_i, D_i, G_i ($i = 1, 2$) sono funzioni da determinarsi imponendo che le (22) soddisfino identicamente il sistema (16). Le (22), dopo le (23), soddisfano identicamente le equazioni $(16)_1$, $(16)_2$, $(16)_4$ e $(16)_8$. Sostituendo le (22) nelle rimanenti equazioni (16) e tenendo conto di (23) si ottiene:

$$\begin{cases} A = L = -\dfrac{1}{v^1 + v^2 + c} \\ B = -A\,(pv^2 + q) \\ M = A\,(pv^1 + pc - q) \\ C = -A\,\{\alpha v^1 v^2 + \gamma v^1 + \beta\,(v^2)^2 + \beta c v^2 + \gamma c\} \\ N = A\,\{(\beta v^1 v^2 + \gamma v^2 + \alpha\,(v^1)^2 + \alpha c v^1\} \end{cases} \tag{24}$$

dove c, p, q, α, β, γ sono costanti arbitrarie di integrazione. Dopo le (24) le (22) forniscono le seguenti espressioni per F^1 ed F^2

$$\begin{cases} F^1 = \dfrac{-\varnothing^2 + (pv^2 + q)\,\varnothing + \alpha v^1 v^2 + \gamma v^1 + \beta\,(v^2)^2 + \beta c v^2 + \gamma c}{v^1 + v^2 + c} \\[2ex] F^2 = \dfrac{-\varnothing^2 + (-pv^1 + q - pc)\,\varnothing - \beta v^1 v^2 - \gamma v^2 - \alpha\,(v^1)^2 - \alpha c v^1}{v^1 + v^2 + c} \end{cases} \tag{25}$$

che rendono completamente eccezionale la (1).

Osserviamo che, dopo le (25), le funzioni arbitrarie di integrazione A^{ik} introdotte a secondo membro della (18), restano anch'esse determinate e risultano espresse come funzione di v^1 e v^2 soltanto. Precisamente si trova:

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
A^{11} &= A^2 \{\{p^2 - 4(\alpha - \beta)\}(v^2)^2 + 2\{pq - 2(\alpha c - \beta c + \gamma)\} v^1 + p^2\} \\
A^{12} &= A^{21} = A^2 \{-\{p^2 - 4(\alpha - \beta)\} v^1 v^2 + \\
&\quad + \{p(q - pc) - 2(\beta c - \alpha c + \gamma)\} v^2 + \\
&\quad + \{-pq - 2(\beta c - \alpha c - \gamma)\} v^1 + \\
&\quad + \{p^2 - pqc + 2\gamma c - 2(\beta - \alpha) c^2\}\} \\
A^{22} &= A^2 \{\{p^2 - 4(\alpha - \beta)\}(v^1)^2 + \\
&\quad + 2\{(pc - q) p - 2(\alpha c - \beta c - \gamma\} v^1 + \{(q - pc)^2 + 4\gamma c\}\} .
\end{aligned}
$$

Chiudiamo questo numero indicando come la presunta iperbolicità della (1) implica delle restrizioni sulle costanti arbitrarie di integrazione p ; q; α ; γ ; β ; c. Infatti la iperbolicità richiede che il discriminante del polinomio caratteristico (8) sia una quantità positiva e ricordando che

$$
(27)\qquad \Delta = A^{ik} n_i n_k
$$

basterà imporre che tale forma quadratica risulti definita positiva.

N. 3. Ci proponiamo ora di caratterizzare le eventuali funzioni F^i ($i = 1, 2$) che rendono la (1) oltre che completamente eccezionale, anche compatibile con una legge di conservazione supplementare. A tale scopo occorre ricercare eventuali soluzioni del sistema (16) che siano della forma (4).

Poiché le (25), tra l'altro, esprimono che le soluzioni di (16) non contengono termini puri in $\varnothing$ bisognerà porre $\psi^i = 0$ ($i = 1, 2$). Di conseguenza le F^i da noi cercate dovranno essere della forma

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
F^1 &= -g(\varnothing)\, \partial h_2/\partial v^1 \\
F^2 &= -g(\varnothing)\, \partial h_2/\partial v^2,
\end{aligned}
$$

dove si è posto

$$
(29)\qquad g(\varnothing) = 1/h_1''.
$$

Il confronto tra le (25) e le (28) suggerisce di porre uguale a zero i termini delle (25) che non risultano compatibili con le (28); ciò comporta

$$
(30)\qquad p = \alpha = \beta = \gamma = 0 .
$$

Dopo la (30) le (26) si particolarizzano nella

$$
(31)\qquad F^1 = F^2 = \frac{-\varnothing^2 + q\varnothing}{v^1 + v^2 + c}
$$

e confrontando con (28) segue:

$$\begin{aligned} g(\varnothing) &= \varnothing^2 - q\varnothing \\ \partial h_2/\partial v^1 = \partial h_2/\partial v^2 &= 1/(v^1 + v^2 + c)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Agli stessi risultati si giunge, come è facile accertare, sostituendo le (28) nelle (16) e procedendo alla integrazione del sistema che così si ottiene per g ed h_2.

Le F^i date da (31) sono le cercate funzioni che rendono l'equazione (1) completamente eccezionale e compatibile con una legge supplementare di conservazione.

Tenendo presente la (29) e integrando il sistema (28) si ottengono per h_1 ed h_2 le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} h_1 &= (\varnothing/q)\log \tilde{a}\,\{(\varnothing - q)/\varnothing\} - \log(\varnothing - q) + \tilde{b} \\ h_2 &= \log \tilde{c}\,(v^1 + v^2 + c) \end{aligned} \tag{33}$$

dove $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ sono arbitrarie costanti di integrazione. E così, dopo le (33) resta determinata anche la legge supplementare di conservazione associata alla (1) nel caso in esame.

N. 4. L'equazione (1) dopo le (31) e le (5) si specializza nella

$$u_{tt} + \Sigma_i\, \partial_{x_i} \{(qu_t - u_t^2)/(u_{x_1} + u_{x_2} + c)\} = 0 \qquad (i = 1\,,\,2) \tag{34}$$

ed i fronti d'onda di discontinuità ad essa associati, come si trova facilmente, si propagano con le velocità

$$\lambda_1 = \frac{(q - u_t)}{u_{x_1} + u_{x_2} + c}\,(n_1 + n_2) \qquad \lambda_2 = \frac{-u_t}{u_{x_1} + u_{x_2} + c}\,(n_1 + n_2)\,. \tag{35}$$

Dimostriamo, ora, che l'equazione (34) pur essendo completamente eccezionale non è strettamente eccezionale ossia possono esistere altri urti oltre a quelli caratteristici. A tale scopo applicando alla (34) le condizioni di Rankine–Hugoniot e ricordando la (5) si ottiene:

$$-s\,[\varnothing] + \left[\frac{q\varnothing - \varnothing^2}{v^1 + v^2 + c}\,(n_1 + n_2)\right] = 0 \tag{36}$$

dove s indica la velocità dell'urto e [ ] il salto della grandezza considerata. Alla (36), tenuto conto della condizione di compatibilità

$$\partial_i \varnothing = \partial_t v^i \tag{37}$$

va aggiunta la relazione

$$s\,[v^i] + [\varnothing]\, n_i = 0\,. \tag{38}$$

Osserviamo che se $v^1 + v^2 + c \neq 0$ il polinomio caratteristico della (34) si scrive

$$\text{(39)} \qquad P(\lambda) = \lambda^2 (v^1 + v^2 + c)^2 + (2\varnothing - q)\lambda(n_1 + n_2)(v^1 + v^2 + c) + \\ - (q\varnothing - \varnothing^2)(n_1 + n_2)^2 = 0$$

d'altra parte da (38) si ha anche

$$\text{(40)} \qquad [s(v^1 + v^2 + c) + \varnothing(n_1 + n_2) - q(n_1 + n_2)] = 0 .$$

Sommando alla (36) moltiplicata per $(n_1 + n_2)$ la (40) moltiplicata per s ne segue

$$\text{(41)} \qquad \left[\frac{1}{v^1 + v^2 + c} P(s)\right] = 0 .$$

È facile accertare, operando sulla (40), che $[P(s)] = 0$ per cui la (41) diventa

$$\text{(42)} \qquad P(s)\,[1/(v^1 + v^2 + c)] = 0$$

e per avere urti diversi da quelli caratteristici basta scegliere

$$\text{(43)} \qquad [v^1] + [v^2] = 0 .$$

Quando tale quantità è diversa da zero i soli urti possibili sono quelli soddisfacenti la condizione $P(s) = 0$ cioè gli urti caratteristici.

Nel caso unidimensionale la condizione (43) si particolarizza in $[v^1] = 0$ e di conseguenza da (38) segue $[\varnothing] = 0$ quindi assenza di urti. Se ne conclude che in tal caso i soli urti possibili sono quelli caratteristici per cui l'equazione (34), per $i = 1$, risulta strettamente eccezionale.

N. 5. I risultati ottenuti nei numeri precedenti suggeriscono una naturale estensione al caso di n variabili spaziali. In tale schema la (34) si generalizza nella

$$\text{(44)} \qquad u_{tt} + \frac{q - u_t}{\sum_i \partial_i u + c} \sum_i \partial_{it} u - \frac{q u_t - u_t^2}{\sum_i (\partial_i u + c)^2} \sum_{i,k} \partial_{ik} u = 0 ,$$

dove le somme rispetto agli indici i e k vanno estese da 1 ad n.

Alla (44) restano associate: *a*) due onde di discontinuità eccezionali propagantesi, rispettivamente, con le velocità

$$\text{(45)} \qquad \lambda_1 = \frac{q - u_t}{\sum_i \partial_i u + c} \Sigma_i n_i \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{-u_t}{\sum_i \partial_i u + c} \Sigma_i n_i$$

b) una legge supplementare di conservazione espressa da

$$\partial_t \left\{ \frac{u_t}{q} \log \tilde{a} \left(- \frac{u_t - q}{u_t} \right) + \log \left(\frac{\Sigma \partial_i u + c}{u_t - q} \right) \right\} + \tag{46}$$

$$+ \partial_i \left\{ \frac{- u_t (u_t - q)}{\Sigma \partial_i u + c} \frac{1}{q} \log \tilde{a} \left(\frac{u_t - q}{u_t} \right) \right\} = 0 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. DONATO (1974) - *On supplementary conservation laws for second order hyperbolic conservative equations*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *57*, 380-386.

[2] G. BOILLAT (1974) - *Sur l'existence et la recherche d'equations de conservation supplémentaires pour les systémes hyperboliques*, « C.R. Acad. Sc. Paris », *278*, sér. A, 909-912.

[3] G. BOILLAT (1972) - *Chocs caractéristiques*, « C.R. Acad. Sc. Paris », *274*, sér. A, 1018-1021.

[4] G. BOILLAT (1968) - *Le champ scalaire de Monge-Amperè*, « Det. Kgl. Norske Vid. Selsk. Forth », Bd. (41).