
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO PICCINNI

Sulle classi simplettiche di Pontrjagin

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 65 (1978), n.3-4, p. 113-119.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_3-4_113_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Sulle classi simplettiche di Pontrjagin.* Nota (*) di
PAOLO PICCINNI, presentata dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Relations are studied between the symplectic Pontrjagin classes of quaternionic vector bundles and the other characteristic classes of real and complex bundles.

È noto che ai fibrati vettoriali sul corpo $\mathbf{H}$ dei quaternioni possono associarsi classi caratteristiche di coomologia della base, di dimensione multipla di quattro. Queste classi, dette simplettiche di Pontrjagin, possono introdursi — in modo analogo alle classi di Chern dei fibrati complessi e alle classi di Stiefel-Whitney dei fibrati reali — facendo uso del teorema di Leray-Hirsch e del fibrato proiettivo associato, e si dimostrano allora soddisfare i consueti quattro assiomi di classi caratteristiche ed essere univocamente individuate da questi ⁽¹⁾.

In questo lavoro si studiano le relazioni che sussistono tra le classi simplettiche di Pontrjagin e le altre classi caratteristiche, con riferimento alle operazioni di complessificazione di un fibrato complesso e di quaternionificazione di un fibrato reale.

Useremo i simboli ξ, ω, ρ per denotare fibrati vettoriali risp. reali, complessi, quaternionali e i simboli $\xi \otimes \mathbf{H}$ e $\omega \otimes \mathbf{C}$ per i fibrati, entrambi quaternionali, ottenuti da ξ per quaternionificazione e da ω per complessificazione. Denoteremo poi con $\hat{p}(\xi), c(\omega), p(\rho)$ le rispettive classi totali di Pontrjagin, di Chern, simplettica di Pontrjagin e con $e(\xi)$ la classe di Eulero di ξ .

Supporremo infine che la base dei fibrati sia uno spazio topologico paracompatto.

1. Indicando con $\bar{\omega}$ il fibrato complesso coniugato di ω e con $p_{\pm}$ la classe totale simplettica a segni alternati: $p_{\pm} = 1 - p_1 + p_2 - p_3 + \dots$, mostriamo in primo luogo che:

(1.1) *Le classi di Chern di ω e di $\bar{\omega}$ determinano la classe simplettica di Pontrjagin di $\omega \otimes \mathbf{C}$ secondo la formula:*

$$p_{\pm}(\omega \otimes \mathbf{C}) = c(\omega) c(\bar{\omega}).$$

Consideriamo dapprima il caso $\omega = \gamma^1(\mathbf{C}) = 1$ -fibrato canonico complesso di base lo spazio proiettivo $\mathbf{CP}^{\infty}$. La relazione da dimostrare si riduce in questo caso alla:

$$(1.2) \quad -p_1(\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}) = c_1(\gamma^1(\mathbf{C})) c_1(\overline{\gamma^1(\mathbf{C})}),$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1978.

(1) Per questo approccio si vedano le trattazioni che si trovano in [2], [5], [6], mentre per altre definizioni si può confrontare [4] e anche il successivo n. 3.

dove $c_1(\gamma^1(\mathbf{C})) = \alpha_2 =$ generatore canonico di $H^*(\mathbf{CP}^\infty; \mathbf{Z})$ e $p_1(\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C})$ può ottenersi, come vedremo, da $p_1(\gamma^1(\mathbf{H})) = \beta_4(\gamma^1(\mathbf{H}) = 1$ -fibrato canonico quaternionale, $\beta_4 =$ generatore canonico di $H^*(\mathbf{HP}^\infty; \mathbf{Z})$.

Infatti se $h: \mathbf{CP}^\infty \rightarrow \mathbf{HP}^\infty$ è un'applicazione classificante $\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}$, si ha $p_1(\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}) = h^* \beta_4$. Per costruire h procediamo nel modo seguente.

Indichiamo con $[\mathbf{CP}^\infty]_p, [\mathbf{HP}^\infty]_p$ gli scheletri p -dimensionali delle decomposizioni cellulari canoniche risp. di $\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{HP}^\infty$ e con $[z_1, \dots, z_i, \dots], [t_1, \dots, t_i, \dots]$ coordinate omogenee di punto risp. in $\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{HP}^\infty$. Le seguenti espressioni sono la definizione formale degli scheletri considerati e delle celle 4-dimensionali delle decomposizioni risp. di $\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{HP}^\infty$:

$$(1.3.a) \quad [\mathbf{CP}^\infty]_{2r} = \{[z_1, \dots, z_i, \dots]; z_i = 0 \text{ per } i > r + 1\}$$

$$(1.3.b) \quad [\mathbf{HP}^\infty]_{4r} = \{[t_1, \dots, t_i, \dots]; t_i = 0 \text{ per } i > r + 1\}$$

$$(1.4.a) \quad a_4 = \{[z_1, z_2, z_3, 0, 0, \dots]; z_3 \neq 0\}$$

$$(1.4.b) \quad b_4 = \{[t_1, t_2, 0, 0, \dots]; t_2 \neq 0\}.$$

Consideriamo allora l'applicazione $h: \mathbf{CP}^\infty \rightarrow \mathbf{HP}^\infty$ definita dalla:

$$(1.5) \quad h[z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, \dots] = [z_1 + z_2 j, \dots, z_{2n-1} + z_{2n} j, \dots],$$

dove si è indicato il quaternion $\text{Re } z' + (\text{Im } z')i + (\text{Re } z'')j + (\text{Im } z'')k$ ($z', z'' \in \mathbf{C}$) con la notazione $z' + z''j$. È immediato verificare che la definizione di h è ben posta rispetto all'omogeneità delle coordinate che vi intervengono; essa è inoltre continua e risulta per ogni p (cfr. 1.3.a, b):

$$(1.6) \quad h([\mathbf{CP}^\infty]_p) \subset [\mathbf{HP}^\infty]_p.$$

Dimostriamo che h risulta un omeomorfismo tra le celle a_4 e b_4 . Indicando per semplicità con $[z_1, z_2, z_3]$ e con $[t_1, t_2]$ i punti risp. di a_4, b_4 rappresentati dalle prime coordinate indicate (con $z_3 \neq 0, t_2 \neq 0$), la restrizione di h alla cella a_4 è espressa dalla:

$$(1.7) \quad h[z_1, z_2, z_3] = [z_1 + z_2 j, z_3].$$

Per concludere che h è un omeomorfismo tra le due 4-celle basta allora osservare che nella (1.7) si può sempre assumere $z_3 = 1$ ottenendo così:

$$(1.7') \quad h[z_1, z_2, 1] = [z_1 + z_2 j, 1],$$

e l'omeomorfismo è evidente. Dalla (1.7') appare inoltre che h conserva le orientazioni canoniche di a_4, b_4 .

Da ciò, e dalla (1.6), segue allora che l'omomorfismo h_* indotto da h in omologia porta il generatore canonico di $H_4(\mathbf{CP}^\infty; \mathbf{Z})$ - generatore che indicheremo ancora con a_4 - nel generatore canonico b_4 di $H_4(\mathbf{HP}^\infty; \mathbf{Z})$.

Abbiamo precedentemente considerato le classi di coomologia

$$\alpha_2 \in H^2(\mathbf{CP}^\infty; \mathbf{Z}) \quad \text{e} \quad \beta_4 \in H^4(\mathbf{HP}^\infty; \mathbf{Z}),$$

che è per sua definizione la duale algebrica di b_4 . Ricordando le definizioni di $a_4 = \{[z_1, z_2, 1]\}$ e (analogamente) di $a_2 = \{[z_1, 1]\}$, è inoltre facile vedere che α_2^2 è duale algebrica di a_4 ; risulta infatti:

$$a_2 = \{[z_1, 1]\} \sim \{[0, z_2, 1]\} = a'_2$$

e pertanto $\langle a_2, \alpha_2 \rangle = \langle a'_2, \alpha_2 \rangle = 1$. Ma $a_4 = a_2 \times a'_2$ e quindi

$$\langle a_4, \alpha_2^2 \rangle = \langle a_2 \times a'_2, \alpha_2^2 \rangle = \langle a_2, \alpha_2 \rangle \langle a'_2, \alpha_2 \rangle = 1.$$

Ne segue

$$\langle a_4, h^* \beta_4 \rangle = \langle h_* a_4, \beta_4 \rangle = \langle b_4, \beta_4 \rangle = 1 = \langle a_4, \alpha_2^2 \rangle,$$

e che:

$$(1.8) \quad h^* \beta_4 = \alpha_2^2,$$

essendo α_2^2 generatore di $H^4(\mathbf{CP}^\infty; \mathbf{Z})$.

Per dimostrare poi che h è un'applicazione classificante $\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}$, ricordiamo che il fibrato canonico $\gamma^1(\mathbf{C})$ può essere costruito a partire dal ricoprimento di $\mathbf{CP}^\infty$ costituito dagli aperti U_α ($\alpha = 1, 2, \dots$) delle rette per l'origine di $\mathbf{C}^\infty$ che non appartengono all'iperpiano $z_\alpha = 0$, e dalle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}^{\mathbf{C}}(z) = z_\alpha/z_\beta$, dove $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ è il punto di coordinate omogenee $(z_1, z_2, \dots)$. Similmente gli aperti V_λ ($\lambda = 1, 2, \dots$) di $\mathbf{HP}^\infty$, costruiti in modo analogo ai precedenti, e le funzioni di transizione $g_{\lambda\mu}^{\mathbf{H}}(t) = t_\lambda/t_\mu$, $t \in V_\lambda \cap V_\mu$, $t = (t_1, t_2, \dots)$ definiscono $\gamma^1(\mathbf{H})$.

Confrontiamo allora funzioni di transizione di $\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}$ e di $h^* \gamma^1(\mathbf{H})$. Per il primo fibrato si hanno, relativamente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$, le funzioni $i \circ g_{\alpha\beta}^{\mathbf{C}} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(1, \mathbf{H})$, essendo i l'inclusione $\text{GL}(1, \mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}(1, \mathbf{H})$. Il secondo fibrato è definito invece dal ricoprimento costituito dagli aperti $h^{-1}V_\lambda (= U_{2\lambda-1} \cup U_{2\lambda})$, ricordando la definizione di h e dalle funzioni $g_{\lambda\mu}^{\mathbf{H}} \circ h : h^{-1}(V_\lambda) \cap h^{-1}(V_\mu) \rightarrow \text{GL}(1, \mathbf{H})$. Per un noto criterio risulta $\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C} \cong h^* \gamma^1(\mathbf{H})$ non appena si provi l'esistenza di funzioni $r_{(\alpha, \lambda)} : U_\alpha \cap h^{-1}(V_\lambda) \rightarrow \text{GL}(1, \mathbf{H})$ tali che sia:

$$i \circ g_{\alpha\beta}^{\mathbf{C}}(z) = r_{(\alpha, \lambda)}(z)^{-1} (g_{\lambda\mu}^{\mathbf{H}} \circ h)(z) r_{(\beta, \mu)}(z),$$

per ogni $z \in U_\alpha \cap h^{-1}(V_\lambda) \cap U_\beta \cap h^{-1}(V_\mu)$. Poiché $g_{\lambda\mu}^{\mathbf{H}}(h(z)) = (z_{2\lambda-1} + z_{2\lambda}j)/(z_{2\mu-1} + z_{2\mu}j)$, basta assumere nella precedente $r_{(\alpha, \lambda)}(z) = (z_{2\lambda-1} + z_{2\lambda}j)/z_\alpha$, e l'equivalenza dei due fibrati è dimostrata. Ne segue che h si estende, tramite l'omeomorfismo tra gli spazi totali, ad un'applicazione classificante di $\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}$ in $\gamma^1(\mathbf{H})$.

Possiamo finalmente scrivere la catena di uguaglianze (tenuto conto della (1.8)):

$$\begin{aligned} p_1(\gamma^1(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}) &= h^* p_1(\gamma^1(\mathbf{H})) = h^* \beta_4 = \alpha_2^2 = \\ &= c_1^2(\gamma^1(\mathbf{C})) = -c_1(\gamma^1(\mathbf{C})) c_1(\overline{\gamma^1(\mathbf{C})}) \end{aligned}$$

e la (1.2) è verificata.

Per l'universalità di $\gamma^1(\mathbf{C})$ e la naturalità di $c, p, \otimes$, si ottiene allora la (1.1) per ogni 1-fibrato complesso.

Per passare al caso più generale di un n -fibrato complesso ω di base B consideriamone un'applicazione di spezzamento $f: B_1 \rightarrow B$ (tale che f^* sia un monomorfismo tra gli anelli di coomologia). Se il fibrato indotto $f^* \omega$ è equivalente a $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ (λ_i 1-fibrati complessi, $i = 1, \dots, n$), è anche $f^*(\omega \otimes \mathbf{C}) \cong (\lambda_1 \otimes \mathbf{C}) \oplus \dots \oplus (\lambda_n \otimes \mathbf{C})$, e

$$p_{\pm}(f^*(\omega \otimes \mathbf{C})) = (1 - p_1(\lambda_1 \otimes \mathbf{C})) \cdots (1 - p_1(\lambda_n \otimes \mathbf{C})).$$

La (1.1), già dimostrata per gli 1-fibrati, fornisce allora:

$$\begin{aligned} p_{\pm}(f^*(\omega \otimes \mathbf{C})) &= (1 - c_1^2(\lambda_1)) \cdots (1 - c_1^2(\lambda_n)) = \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\lambda_i)) \prod_{i=1}^n (1 - c_1(\lambda_i)) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\lambda_i)) \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\overline{\lambda_i})) = \\ &= c(f^* \omega) c(f^* \overline{\omega}), \end{aligned}$$

e quindi:

$$f^*(p_{\pm}(\omega \otimes \mathbf{C})) = f^* c(\omega) f^* c(\overline{\omega}) = f^*(c(\omega) c(\overline{\omega})).$$

Poiché f^* è un monomorfismo, ne segue la (1.1) per ogni ω .

2. Sia ω_R il fibrato reale soggiacente di ω . Dalla proposizione appena dimostrata discende che:

(2.1) Per ogni fibrato complesso ω vale l'identità:

$$\hat{p}(\omega_R) = p(\omega \otimes \mathbf{C}).$$

Ponendo infatti, analogamente a quanto fatto all'inizio del n. 1, $\hat{p}_{\pm} = 1 - \hat{p}_1 + \hat{p}_2 - \dots$, $c_{\pm} = 1 - c_1 + c_2 - \dots$, e ricordando che le classi $c(\omega)$ e $\hat{p}(\omega_R)$ sono legate dalla relazione ⁽²⁾:

$$(2.2) \quad \hat{p}_{\pm}(\omega_R) = c_{\pm}(\omega) c(\omega) = c(\overline{\omega}) c(\omega),$$

dal confronto con la (1.1) si ha subito il risultato.

(2.3) È noto che la classe di Pontrjagin $\hat{p}$ non soddisfa, a differenza della classe simplettica p , ad un teorema del prodotto (ma soltanto ad un simile teorema « indebolito »). Dalla (2.1) segue tuttavia che, *limitatamente ai fibrati del tipo ω_R , anche la $\hat{p}$ verifica la formula del prodotto*. Ciò si può ottenere anche a partire dalla definizione $\hat{p}_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C})$, ricordando l'equivalenza $\omega_R \otimes \mathbf{C} \cong \omega \oplus \overline{\omega}$ e sviluppando un calcolo diretto.

(2) Cfr. per esempio [3], p. 177 (dove si sostituisca p con il simbolo $\hat{p}$ che qui usiamo) e p. 168.

Dimostriamo che:

(2.4) Per ogni fibrato reale ξ risulta:

$$p(\xi \otimes \mathbf{H}) = \hat{p}^2(\xi).$$

Sussistono infatti le equivalenze di fibrati

$$\xi \otimes \mathbf{H} \cong (\xi \otimes \mathbf{C}) \otimes \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \xi \oplus \xi \cong (\xi \otimes \mathbf{C})_{\mathbf{R}}.$$

Dalla (2.1) segue allora:

$$(2.5) \quad p(\xi \otimes \mathbf{H}) = \hat{p}(\xi \oplus \xi).$$

Poiché:

$$\hat{p}_i(\xi \oplus \xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C} \oplus \xi \otimes \mathbf{C}),$$

sviluppando il secondo membro della precedente con il teorema del prodotto e ricordando che le classi di Chern di indice dispari di $\xi \otimes \mathbf{C}$ sono elementi di ordine due, si ottiene:

$$\hat{p}_i(\xi \oplus \xi) = \sum_{j+k=i} \hat{p}_j(\xi) \hat{p}_k(\xi)$$

o, con notazione di classi totali:

$$\hat{p}(\xi \oplus \xi) = \hat{p}^2(\xi).$$

Il confronto con la (2.5) dà allora la (2.4).

3. Daremo qui una diversa dimostrazione della proposizione (1.1) e ne trarremo qualche conseguenza. Osserviamo che le classi simplettiche di Pontrjagin possono essere definite con un procedimento analogo a quello usato in [3] per introdurre le classi di Chern.

Per un n -fibrato quaternioniale ρ si pone:

$$p_n(\rho) = (-1)^n e(\rho_{\mathbf{R}}),$$

e induttivamente si definiscono le altre classi simplettiche. Data la stretta analogia con il caso delle classi di Chern tralasciamo qui i dettagli della definizione e della dimostrazione degli assiomi (cfr. [3], § 14).

Indicati con $\rho_{\mathbf{C}}$ e $\rho_{\mathbf{R}}$ i fibrati soggiacenti risp. complesso e reale di ρ , dimostriamo che:

(3.1) Le classi di Chern di $\rho_{\mathbf{C}}$ e le classi simplettiche dell' n -fibrato quaternioniale ρ sono legate dalla:

$$p_{\pm}(\rho) = c(\rho_{\mathbf{C}}).$$

Infatti dalla definizione di $p(\rho)$ cui si è appena accennato e dalla analoga di $c(\omega)$ segue subito:

$$(3.2) \quad p_n(\rho) = (-1)^n c_{2n}(\rho_e) = (-1)^n c(\rho_R).$$

Risulta inoltre:

$$(3.3) \quad c_{2i+1}(\rho_e) = 0,$$

poiché è $H^{4i+2}(G_n(\mathbf{H}^\infty); \mathbf{Z}) = 0$ e per l'universalità di $\gamma^n(\mathbf{H})$. Ne segue la (3.1) per ogni 1-fibrato quaternionale. Per passare al caso più generale di un n -fibrato ρ , di base B , consideriamone un'applicazione di spezzamento $f: B_1 \rightarrow B$. Risulta allora $f^* \rho \cong \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$, con λ_i 1-fibrati quaternionali, $i = 1, \dots, n$, e quindi:

$$\begin{aligned} f^* p_{\pm}(\rho) &= p_{\pm}(f^* \rho) = p_{\pm}(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n) = \\ &= (1 - p_1(\lambda_1)) \dots (1 - p_1(\lambda_n)) = (1 + c_2(\lambda_{1e})) \dots (1 + c_2(\lambda_{ne})) = \\ &= c(\lambda_{1e} \oplus \dots \oplus \lambda_{ne}) = c(f^* \rho_e) = f^* c(\rho_e), \end{aligned}$$

dove nella terz'ultima uguaglianza si è fatto uso della (3.3) e nella penultima dell'equivalenza $f^* \rho_e \cong \lambda_{1e} \oplus \dots \oplus \lambda_{ne}$, indotta dallo spezzamento sopra indicato. Poiché f^* è un monomorfismo, ne segue la (3.1) per ogni ρ .

Osserviamo poi che:

(3.4) *I fibrati complessi $(\omega \otimes \mathbf{C})_e$ e $\omega \oplus \bar{\omega}$ risultano canonicamente equivalenti.*

Indicando infatti con J l'operazione di moltiplicazione a sinistra per j si ha ovviamente $(V \text{ fibra standard di } \omega): (V \otimes \mathbf{C})_e \cong V \oplus JV$. D'altronde è $jav = \bar{a}jv$ ($a \in \mathbf{C}$, $v \in V$), quindi $JV \cong \bar{V}$, da cui $(V \otimes \mathbf{C})_e \cong V \oplus \bar{V}$. Ne segue subito l'indicata equivalenza di fibrati.

Dalla (3.1), per $\rho = \omega \otimes \mathbf{C}$, e tenuto conto della (3.4), segue allora:

$$p_{\pm}(\omega \otimes \mathbf{C}) = c(\omega \oplus \bar{\omega}) = c(\omega) c(\bar{\omega}),$$

e si riottiene così la relazione (1.1).

(3.5) Dalla (2.2), assumendo $\omega = \rho_e$, considerando i termini delle varie dimensioni, e tenuto conto della (3.1), si ha subito che la classe $p(\rho)$ determina $\hat{p}(\rho_R)$ secondo la:

$$\hat{p}(\rho_R) = p^2(\rho).$$

Osserviamo infine che la precedente ha la stessa struttura della (2.4) e che, considerando le classi $\hat{p}_i$ e p_i nella coomologia a coefficienti in un dominio di integrità che contenga $1/2$, entrambi le formule (2.4) e (3.5)

ammettono una soluzione induttiva rispetto alle classi che vi compaiono a secondo membro. Si ottiene:

(3.6) *Nella coomologia a coefficienti in un dominio di integrità contenente $1/2$ le classi simplettiche di Pontrjagin e le classi ordinarie di Pontrjagin sono determinate le une dalle altre mutuamente. Precisamente $p(\rho)$ è determinata da $\hat{p}(\rho_R)$ invertendo la (3.5), e $\hat{p}(\xi)$ è determinata da $p(\xi \otimes H)$ invertendo la (2.4).*

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. HUSEMOLLER (1975) - *Fibre bundles*, 2nd Ed., Springer.
- [2] E. MARTINELLI - *Introduzione alla teoria delle classi caratteristiche: uno sguardo panoramico*, Centro Linceo Interdisciplinare, (in corso di stampa).
- [3] J. W. MILNOR e J. D. STASHEFF, (1974) - *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press.
- [4] R. E. STONG (1967) - *Some remarks on symplectic cobordism*, «Ann. of Math.», 86, 425-433.
- [5] R. E. STONG (1968) - *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press.
- [6] R. M. SWITZER (1975) - *Algebraic Topology. Homotopy and Homology*, Springer.