
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GRAZIA TAMONE

Su una generalizzazione della nozione di incollamento

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 65 (1978), n.3-4, p. 107–112.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_3-4_107_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria algebrica. — *Su una generalizzazione della nozione di incollamento* (*). Nota (**) di GRAZIA TAMONE, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we give a generalization of the notion—introduced by C. Traverso in [5]—of “glueing of prime ideals of a ring B over a prime ideal of a ring $A \subset B$ ”. We prove the following result: if B is an overring of A , integral of finite type over A , A can be obtained from B by a finite number of glueings of the above defined kind; geometrically, every singularity of an algebraic variety V can be obtained from the normalization of V , by a finite number of such glueings.

1. In questo lavoro vengono presentate alcune proprietà relative ad una estensione della nozione di «incollamento di ideali primi di un anello B su un primo di un sottoanello A di B ». Tale incollamento, definito da C. Traverso in [5], può riassumersi come segue:

se B è intero e finito sul sottoanello A , p è un ideale primo di A e $p_1, \dots, p_n$ sono i primi di B che si contraggono a p , si può costruire un anello A' intermedio fra A e B , che è il più grande sottoanello di B contenente A soddisfacente alle seguenti proprietà:

- (i) esiste un solo primo p' di A' che si contrae a p ;
- (ii) l'omomorfismo canonico dei corpi residui $k(p) \hookrightarrow k(p')$ è un isomorfismo.

Tale A' è detto l'anello ottenuto da B per incollamento (di $p_1, \dots, p_n$) su p .

Vi sono forti legami tra la nozione di incollamento e quella di seminormalità; conviene allora ricordare alcune definizioni e proprietà.

L'anello ${}^+_B A = \{b \in B \mid b/I \in A_p + \text{rad}(B_{A-p}) \forall p \in \text{Spec } A\}$ si dice seminormalizzazione di A in B (se $B = \bar{A}$ si parlerà semplicemente di seminormalizzazione); ${}^+_B A$ risulta il più grande sottoanello di B contenente A tale che:

- a) per ogni primo $p \in \text{Spec } A$ esiste un solo primo p' di ${}^+_B A$ che si contrae a p ;
- b) l'omomorfismo canonico dei corpi residui $k(p) \hookrightarrow k(p')$ è un isomorfismo.

Se $A = {}^+_B A$, si dice che A è seminormale in B .

Risulta subito da quanto sopra che, se A' è ottenuto da B per incollamento su un primo di A , A' è seminormale in B . Di più, Traverso ha

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della sezione n. 3 del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1978.

dimostrato che i sopranelli A' di A seminormali in B sono caratterizzati dalla proprietà di essere ottenuti con un numero finito di incollamenti su primi di A (cfr. [5], Teorema 2.1).

Sono note le seguenti applicazioni geometriche della seminormalità.

Le curve seminormali su un corpo algebricamente chiuso k sono tutte e sole quelle dotate di punti n -upli a tangenti distinte, con spazio tangente di Zariski di dimensione n . Le superficie di k^3 dotate di singolarità ordinarie sono seminormali (cfr. [1]).

Possiamo dire che un punto P di una varietà V è un punto singolare seminormale se $k[V]_{(P)}$ è un anello seminormale. Tenendo conto del risultato di Traverso menzionato sopra, si ha che le «singolarità seminormali» di V risultano tutte e sole quelle ottenibili dalla normalizzazione di V con un numero finito di incollamenti del tipo descritto.

In questo lavoro (cfr. n. 2) introdurremo una nozione più generale di incollamento, mediante la quale ogni sottoanello A di B (non necessariamente seminormale) si può ottenere con un numero finito di incollamenti a partire da B , sempre supposto intero e finito su A .

Geometricamente il significato è il seguente: tutte le singolarità di V sono ottenibili dalla normalizzazione, con un numero finito di incollamenti del nuovo tipo.

Siano A, B come sopra. Se p è un primo di A , detti $p_1, \dots, p_n$ i primi di B che si contraggono a p , siano $q_1, \dots, q_n$ ideali primari di B contenenti pB e tali che q_i sia p_i -primario per ogni $i = 1, \dots, n$.

Definiremo un anello intermedio fra A e B contenuto in A' , che chiameremo «anello ottenuto da B per incollamento di $q_1, \dots, q_n$ sul primo p di A »; tale anello coincide con A' se $q_i = p_i$ per ogni i .

Dimostreremo che, se A è noetheriano e B è un sopranello di A intero e finito su A , A è ottenibile da B con un numero finito di tali «incollamenti».

In [3] e [4] sono stati indicati procedimenti per ottenere incollamenti «espliciti» su un primo, secondo Traverso; ossia si è provato che, a partire da un anello B e da n ideali primi di B , sotto certe ipotesi si può costruire un sottoanello A di B che coincide con l'anello ottenuto da B per incollamento dei primi suddetti su un primo di A . Anche per quanto riguarda gli incollamenti definiti in questo lavoro, si può determinare un procedimento che, ricalcando quello indicato in [4], permette di effettuare un incollamento «esplicito», a partire da un anello B e da n ideali primari di B soddisfacenti a certe condizioni (cfr. n. 3).

Le dimostrazioni dei risultati enunciati in questo articolo compariranno in un lavoro che è attualmente in fase di preparazione.

Tutti gli anelli che consideriamo sono commutativi, dotati di identità e noetheriani.

2. Siano $A, B, p, p_1, \dots, p_n$ come nel numero 1. Siano poi $q_1, \dots, q_n$ ideali primari di B contenenti pB e tali che $\sqrt{q_i} = p_i$ per $i = 1, \dots, n$.

Posto $S = A/\mathfrak{p} - \{0\}$, si vede facilmente che i morfismi « naturali » $f_i: k(\mathfrak{p}) \rightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{q}_i)$ e $g_i: B/\mathfrak{q}_i \rightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{q}_i)$ sono iniettivi, per $i = 1, \dots, n$. Tale osservazione consente di identificare $b(\mathfrak{q}_i) = b \bmod \mathfrak{q}_i$ con la sua immagine $g_i(b(\mathfrak{q}_i))$ (per ogni $b \in B, i \in \{1, \dots, n\}$) e di verificare immediatamente che il sottoinsieme di B che verrà considerato nella Definizione 2.1 è un sottoanello di B .

DEFINIZIONE 2.1. Siano A, B tali che $A \subset B$ e B è intero e finito su $A, \mathfrak{p}$ un primo di A e $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ i primi di B che si contraggono a $\mathfrak{p}$. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ sia $\mathfrak{q}_i$ un ideale $\mathfrak{p}_i$ -primario di B contenente $\mathfrak{p}B$.

Dette f_i le immersioni: $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{q}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) sia A'' il sottoanello di B costituito dagli elementi $b \in B$ tali che:

$$\begin{aligned} b(\mathfrak{q}_i) &\in f_i(k(\mathfrak{p})) && \text{per } i \in \{1, \dots, n\} \\ f_i^{-1}(b(\mathfrak{q}_i)) &= f_j^{-1}(b(\mathfrak{q}_j)) && \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Diciamo che A'' è l'anello ottenuto da B per incollamento di $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ sul primo $\mathfrak{p}$ di A .

È facile vedere che, se $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ per ogni i , l'anello A'' ora definito coincide con l'anello A' costruito da Traverso in [5].

Enunciamo ora alcune proprietà dell'anello A'' , che sono analoghe alla (i) e (ii) dell'anello A' ricordate nel n. 1.

PROPOSIZIONE 2.2. Sia A'' l'anello ottenuto da B per incollamento di $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ su $\mathfrak{p}$, come nella Definizione 2.1. Si ha:

a) Esiste un solo primo $\mathfrak{p}''$ di A'' tale che $\mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$, e

$$\mathfrak{p}'' = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i \cap A'' \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

b) L'omomorfismo canonico $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow k(\mathfrak{p}'')$ è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.3. L'anello A'' è il più grande sottoanello C di B contenente A e tale che:

a) $\mathfrak{p}'' = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ è un ideale primo di C , ed è l'unico primo di C che si contrae a $\mathfrak{p}$;

b) l'omomorfismo canonico $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow k(\mathfrak{p}'')$ è un isomorfismo.

Il risultato principale relativo alle proprietà degli incollamenti qui definiti è espresso dal seguente

TEOREMA 2.4. Siano A un anello, B un sopranello di A intero e finito su A . Esiste una sequenza $B = B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n = A$, tale che B_{i+1} è ottenuto da B_i per incollamento, su un primo $\mathfrak{p}$ di A , dei primari isolati associati a $\mathfrak{p}B_i$ i cui radicali sono i primi di B_i che si contraggono a $\mathfrak{p}$.

Cenno di dimostrazione. Supponiamo che B_i sia già stato determinato.

Se $B_i \neq A$, sia $\mathfrak{p}$ un primo minimale associato al conduttore $\mathfrak{b}_i$ di A in B_i , e sia $\mathfrak{q}$ il $\mathfrak{p}$ -primario isolato di $\mathfrak{b}_i$. Definiamo B_{i+1} l'anello ottenuto da B_i per incollamento su $\mathfrak{p}$, nel senso precisato nell'enunciato.

Se $B_{i+1} \neq A$, detto $\mathfrak{b}_{i+1}$ il conduttore di A in B_{i+1} , si ha: $\mathfrak{p}$ non è più associato a $\mathfrak{b}_{i+1}$ se $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, mentre è ancora primo minimale di $\mathfrak{b}_{i+1}$ se $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Precisamente si vede che, se r è il minimo intero positivo tale che $\mathfrak{p}^r \subset \mathfrak{q}$, sono necessari e sufficienti r incollamenti su $\mathfrak{p}$ per ottenere un anello B_j tale che $\mathfrak{p}$ non sia più primo associato al conduttore $\mathfrak{b}_j$ di A in B_j . Si ha allora: $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{b}_j$; si ottiene pertanto una catena strettamente crescente di conduttori, la quale, per l'ipotesi di noetherianità, è necessariamente stazionaria; esiste dunque un B_n tale che $B_n = A$.

OSSERVAZIONE. Dal Teorema 2.4 si deduce che tutte le singolarità non normali delle varietà affini si possono ottenere con un numero finito di incollamenti del tipo suddetto. Presentiamo alcuni esempi, che verteranno su anelli delle coordinate di curve non seminormali (in tale ambito si possono ottenere i più semplici esempi non banali).

Esempio 1. Siano $A = k[t^2, t^{2n+1}]$ con $n \geq 1$, $B = k[t]$, dove t è un'indeterminata.

Si ha: $\mathfrak{b}_0 = (t^{2n}, t^{2n+1})$ che è $\mathfrak{p}$ -primario, dove $\mathfrak{p} = (t^2, t^{2n+1})$. Si vede che n è il minimo intero positivo tale che $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{b}_0$. Procedendo per incollamento su $\mathfrak{p}$, conformemente a quanto detto nel cenno di dimostrazione del Teorema 2.4 si ha:

$$\mathfrak{p}B = (t^2)k[t], \text{ che è primario, quindi } B_1 = \{f(t) = f_0 + f_1 t + \dots \in B \mid f(t) \bmod (t^2) \in k\} = \{f_0 + f_1 t + \dots \in k[t] \mid f_1 = 0\} = k[t^2, t^3].$$

Allora, $\mathfrak{p}B_1 = (t^2, t^{2n+1})k[t^2, t^3]$ che è primario; quindi

$$B_2 = \left\{ \sum_{i,j} f_{ij} t^{2i} t^{3j} \mid f_{01} = 0 \right\} = k[t^2, t^5].$$

Così procedendo si vede che $B_i = k[t^2, t^{2i+1}]$ per $i \leq n$, e quindi che $B_n = A$.

Esempio 2. Siano $A = k[X, Y]/(XY(X - Y)) = k[x, y]$,

$$B = k[X, Y]/(X) \oplus k[X, Y]/(Y) \oplus k[X, Y]/(X - Y) \simeq k[t] \oplus k[t] \oplus k[t].$$

Osserviamo che A è canonicamente isomorfo al sottoanello di B costituito dagli elementi

$$(f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n, g_0 + g_1 t + \dots + g_m t^m, h_0 + h_1 t + \dots + h_p t^p) \in B,$$

tali che $f_0 = g_0 = h_0$, $h_1 = f_1 + g_1$.

Si ha: $\mathfrak{b} = (x, y)^2$ (cfr. [2], Proposizione 3.4) che è $\mathfrak{p}$ -primario, dove $\mathfrak{p} = (x, y)$.

Si vede che $pB = p_1 \cap p_2 \cap p_3$ dove $p_1 = (t) \oplus k[t] \oplus k[t]$,

$$p_2 = k[t] \oplus (t) \oplus k[t] \quad , \quad p_3 = k[t] \oplus k[t] \oplus (t) ,$$

quindi B_1 coincide con l'anello ottenuto per incollamento alla Traverso di p_1, p_2, p_3 su p ed è, come è facile verificare, il sottoanello di B costituito dagli elementi

$$(f_0 + f_1 t + \dots, g_0 + g_1 t + \dots, h_0 + h_1 t + \dots) \in B$$

tali che $f_0 = g_0 = h_0$. Osserviamo che B_1 è la seminormalizzazione di A in B , ed è isomorfo all'anello $k[X, Y, Z]/(X, Z) \cap (Y, Z) \cap (X - Y, X + Z)$.

Si ha poi: pB_1 è primario, e

$$B_2 = \{(f_0 + f_1 t + \dots, g_0 + g_1 t + \dots, h_0 + h_1 t + \dots) \in B \mid f_0 = g_0 = h_0, h_1 = f_1 + g_1\} = A .$$

3. Indichiamo qui una costruzione con la quale, sotto certe ipotesi, a partire da un anello B e da n ideali primari $q_1, \dots, q_n$ di B , si ottiene un particolare sottoanello A di B , che coincide con l'anello ottenuto da B per incollamento di $q_1, \dots, q_n$ su un primo di A .

Siano B una k -algebra finitamente generata, di dimensione d , $q_1, \dots, q_n$ ideali primari di B di altezza s , con radicali $p_1, \dots, p_n$ distinti.

Siano $z_1, \dots, z_d$ elementi di B algebricamente indipendenti su k e tali che B è intero su $k[z_1, \dots, z_d]$ e $\left(\bigcap_{i=1}^n q_i\right) \cap k[z_1, \dots, z_d] = (z_1, \dots, z_s)$. Sia poi $k' \subset k$ tale che k è estensione algebrica finita di k' . Poniamo

$$(\cdot) \quad A = k'[z_{s+1}, \dots, z_d] + \bigcap_{i=1}^n q_i .$$

PROPOSIZIONE 3.1. *Se A è l'anello definito in $(\cdot)$ si ha:*

- a) *Se $n > 1$, oppure se $n = 1$ e $q_1 \not\subset p_1$, si ha: $A \subsetneq B$;*
- b) *Se $n = 1$ e $q_1 = p_1$, si ha: $A \subsetneq B$ se $k' \subsetneq k$. Più precisamente, se $n = 1$ e $q_1 = p_1$ risulta $A \subsetneq B$ se e solo se $k'(z_{s+1}, \dots, z_d) \subsetneq k(p_1)$.*

TEOREMA 3.2. *Se A è l'anello definito in $(\cdot)$ si ha:*

- 1) *A è l'anello ottenuto da B per incollamento di $q_1, \dots, q_n$ su un primo di A , ed è una k' -algebra finitamente generata.*

Se, inoltre, B è normale ridotto e $s \geq 1$ si ha anche:

- 2) *B è la chiusura integrale di A nel suo anello totale delle frazioni.*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 1.3 di [4].

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BOMBIERI (1973) - *Seminormalità e singolarità ordinarie*, «Symposia Mathematica», **II**, 205-210.
- [2] F. ORECCHIA (1975) - *Sui gruppi di Picard di certe algebre finite non integre*, «Ann. Univ. di Ferrara», Nuova Serie, sez. VII, **19**, 25-36.
- [3] C. PEDRINI (1973) - *Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard*, «Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova», **48**, 39-66.
- [4] G. TAMONE (1977) - *Sugli incollamenti di ideali primi* «Bollettino U.M.I.» (5), **14-B**, 810-825.
- [5] C. TRAVERSO (1970) - *Seminormality and Picard group*, «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», **24** (4), 585-595.