Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tullio Valent

Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.1-2, p. 27–37.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_1-2_27_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Analisi matematica. — *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale* (*). Nota (**) di TULLIO VALENT, presentata dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — In order to obtain some theorems of local existence and uniqueness for a non-linear differential problem and investigate about the significance of its linearization, we study the differentiability of a non-linear operator acting among Banach spaces for which the (formally) linearized operator is an isomorphism.

We give a definition of "admissible linearization" with respect to a pair of Banach spaces.

We consider a differential operator T of the form $Tu = D^* a(x, Du)$, [where Du is the gradient of u and D^* is the formal transpose of D] and by using the results of [7] we give examples of admissible and non-admissible linearizations for the Dirichlet problem.

Per l'operatore differenziale quasi–lineare T della forma $Tu = D^* a(x, Du)$, [ove Du è il gradiente di u e D^* è il trasposto formale di D], si considera il problema di Dirichlet con condizione al contorno omogenea; le cose che si dicono (tranne i Teoremi del n. 3) sono, tuttavia, estendibili ad altri tipi di problemi al contorno per T.

Si considera una linearizzazione formale del problema.

Se il problema linearizzato è ellittico, ci sono degli spazi, per così dire usuali, per la soluzione e per il dato, ($H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$), rispetto ai quali il problema linearizzato – nella sua formulazione debole – risulta ben posto.

Ciò che si rileva qui, sulla base del Teorema 1 di [7], è il fatto che l'operatore nonlineare T non è differenziabile quando lo si fa agire tra questi spazi (almeno sotto certe condizioni).

Questa constatazione conduce a una definizione di linearizzazione ammissibile rispetto a una coppia di spazi di Banach.

Si osserva che la possibilità di avere delle linearizzazioni ammissibili è legata all'esistenza di Teoremi di regolarità per la soluzione del problema linearizzato: non bastano maggiorazioni in L^p del gradiente. Nel caso del problema di Dirichlet, notoriamente, esistono Teoremi di questo tipo.

I teoremi 2 e 3 di [7] permettono di ottenere, al n. 3, due Teoremi di esistenza e unicità locali per il problema di Dirichlet relativo a T.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1978.

1. Definizioni

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $\partial\Omega$ la sua frontiera.

Per m intero ≥ 1 e p reale > 1, sia $H^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ [1] dotato della norma $\|\cdot\|_{m,p}$ definita da

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p},$$

essendo $L^p(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni *reali* di potenza p–ma sommabile in Ω e $\|\cdot\|_p$ la norma di $L^p(\Omega)$.

$H_0^{m,p}(\Omega)$ denoterà la chiusura in $H^{m,p}(\Omega)$ dell'insieme $\mathscr{D}(\Omega)$ delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω.

Porremo, come d'abitudine,

$$H^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \qquad \text{e} \qquad H_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega).$$

Sia $(x, y) \to a(x, y) = (a_i(x, y))_{i=1,\cdots,n}$ una funzione di $\Omega \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ tale che $\dfrac{\partial a}{\partial y_j}(x, 0)$, $(j = 1, \cdots, n)$, esistano $\forall x \in \Omega$. Sia, per semplicità,

$$a(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Consideriamo l'operatore differenziale (quasi–lineare)

$$Tu = D^* a(x, Du),$$

ove $Du = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{j=1,\cdots,n}$ e D^* è il trasposto formale del gradiente D, cioè l'opposto della divergenza. Più esplicitamente:

$$Tu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, Du).$$

Supposto a non lineare in y, consideriamo l'operatore differenziale lineare

$$T_L u = D^* l(x, Du),$$

ove $l = (l_i)_{i=1,\cdots,n}$ è la funzione di $\Omega \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ definita ponendo

$$l(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_j}(x, 0)\, y_j.$$

Se τ è una funzione di Ω in $\mathbf{R}^n$, porremo, per ogni $x \in \Omega$,

$$A\tau(x) = a(x; \tau(x)) \quad , \quad L\tau(x) = l(x, \tau(x)),$$

$$A_i\,\tau(x) = a_i(x, \tau(x)) \quad , \quad L_i\,\tau(x) = l_i(x, \tau(x)).$$

(1) $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, ($\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ interi ≥ 0), $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Consideriamo il problema

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Diremo che il problema lineare

$$\text{(PL)} \qquad \begin{cases} \mathrm{T_L}\, u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è ottenuto linearizzando (formalmente) nell'origine il problema (P).

Siano S_u e S_f due spazi di distribuzioni in Ω, il primo per la soluzione u e il secondo per il dato f; S_u e S_f siano spazi di Banach.

Gli elementi di S_u siano « funzioni » verificanti, in un qualche senso, la condizione di annullarsi su $\partial\Omega$ e tali che le loro derivate prime siano « funzioni »: potremmo supporre, per esempio,

$$S_u \subseteq H_0^1(\Omega)\,.$$

Affinchè T sia definito in S_u (intendendo D e D* nel senso delle distribuzioni), supponiamo che $\mathrm{AD}u$ sia localmente sommabile in Ω per ogni $u \in S_u$.

Se T è un omeomorfismo di un intorno U dell'origine di S_u su un intorno V dell'origine di S_f, conveniamo di dire che *la linearizzazione* (PL) *del problema* (P) *nell'origine è ammissibile rispetto a* (S_u, S_f) quando sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

(i) il problema (PL) è ben posto rispetto a (S_u, S_f), nel senso che $\mathrm{T_L}$ *è un isomorfismo di* S_u *su* S_f,

(ii) $\mathrm{T} : \mathrm{U} \to S_f$ è *differenziabile* (secondo Fréchet) *in* o *e risulta* (2), $\mathrm{T}'(0) = \mathrm{T_L}$.

Ricordando che $\mathrm{T}\,0 = 0$, non è difficile constatare (vedi ad esempio [3], Lemma di p. 55) che, se $\mathrm{T} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ è un omeomorfismo, l'insieme delle condizioni (i) e (ii) equivale all'insieme delle condizioni (i) e (ii)', ove

(ii)' $\mathrm{T}^{-1} : \mathrm{V} \to S_U$ *è differenziabile* (secondo Fréchet) *in* o *e risulta* $(\mathrm{T}^{-1})'(0) = \mathrm{T_L}^{-1}$.

Pertanto, se T è un omeomorfismo di U su V e sussistono (i) e (ii), si ha

$$\lim_{\|f\|_{S_f} \to 0} \frac{\|\mathrm{T}^{-1} f - \mathrm{T_L}^{-1} f\|_{S_u}}{\|f\|_{S_f}} = 0\,, \qquad (f \in \mathrm{V}\,, \mathrm{T}^{-1} f \in \mathrm{U})\,,$$

(2) $\mathrm{T}'(0)$ è il differenziale di T nell'origine.

Si noti che in (ii) si richiede la differenziabilità di $\mathrm{T} : \mathrm{U} \to S_f$ soltanto in o. Se in (ii) fosse richiesta la differenziabilità di T in un intorno aperto di o, oppure la « stretta differenziabilità » di T in o (vedi [3], p. 53) e la continuità di T, allora – sussistendo (i), (ii) – T subordinerebbe automaticamente un omeomorfismo tra un intorno dell'origine di S_u e un intorno dell'origine di S_f (vedi [3], Teorema 4.2.1 e Proposizione 4.3.1).

di cui il significato è palese quando si pensi the $T^{-1}f$ e $T_L^{-1}f$ sono rispettivamente la soluzione del problema (P) e quella del problema linearizzato (PL) in corrispondenza del dato $f \in V$.

2. Esempi di linearizzazioni non ammissibili

In questo numero supponiamo che a sia continua e verifichi la condizione

$$|a(x,y)| \leq b + c\,|y| \qquad \forall (x,y) \in \Omega \times \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

con b, c costanti positive, che le funzioni $x \to \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0)$ siano continue in $\overline{\Omega}$ e tali che

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0) = \frac{\partial a_j}{\partial y_i}(x, 0), \qquad (i, j = 1, \cdots, n), \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0)\, y_i y_j > 0 \qquad \forall (x, y) \in \overline{\Omega} \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}). \tag{3}$$

(2) esprime il fatto che T_L è autoaggiunto e (3) è una condizione di ellitticità per T_L.

Allora, com'è ben noto (vedi ad esempio [5]), il problema (PL) risulta ben posto assumendo

$$S_u = H_0^1(\Omega) \quad , \quad S_f = H^{-1}(\Omega), \tag{I}$$

ove $H^{-1}(\Omega)$ è il duale forte dello spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Inoltre da (1) segue (vedi ad esempio [6], Teorema 3.2) che A è un operatore continuo di $(L^p(\Omega))^n$ in sé per ogni $p \geq 1$; ne discende che, per ogni $p > 1$, T è un operatore continuo di $H_0^{1,p}(\Omega)$ nel duale forte $H^{-1,p}(\Omega)$ dello spazio di Banach $H_0^{1,p'}(\Omega)$, $(1/p + 1/p' = 1)$, e quindi, in particolare, T è un operatore continuo di $H_0^1(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$.

Ciò che vogliamo mettere in evidenza è che, se T subordina un omeomorfismo tra un intorno U dell'origine di $H_0^1(\Omega)$ e un intorno V dell'origine di $H^{-1}(\Omega)$, allora $T : (H_0^1(\Omega)) \to H^{-1}(\Omega)$ non è differenziabile nell'origine [(3)].

Il fatto discende dal Teorema 1 di [7].

Infatti, poichè T subordina un omeomorfismo tra U e V e $A : (L^2(\Omega))^n \to \to (L^2(\Omega))^n$ è continua, l'operatore lineare continuo $D^* : (L^2(\Omega))^n \to H^{-1}(\Omega)$ subordina un omeomorfismo tra $AD(H_0^1(\Omega)) \subseteq (L^2(\Omega))^n$ e V quindi

(3) Per provare che $T : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ non è differenziabile in 0 non ci sarebbe neppure bisogno di supporre che T subordini un omeomorfismo tra due intorni dell'origine. Cfr. infatti il prossimo Teorema 3.

$D^{*-1}: V \to AD(H_0^1(\Omega)) \subseteq (L^2(\Omega))^n$ è differenziabile nell'origine; pertanto, se $T: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ fosse differenziabile nell'origine, tale sarebbe anche $A \circ D: H_0^1(\Omega) \to (L^2(\Omega))^n$ e quindi, per il Teorema 1 di [7], a sarebbe lineare in y, contrariamente a quanto abbiamo supposto.

Dunque *la linearizzazione* (PL) *del problema* (P) *non è ammissibile rispetto alla scelta* (I) *degli spazi* S_u e S_f.

Con qualche condizione su Ω, se le funzioni $x \to \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0)$ sono hölderiane in $\overline{\Omega}$, sussiste il seguente risultato di regolarità (vedi [2]) per il problema (PL):

per ogni $p > 1$, T_L è un isomorfismo di $H_0^{1,p}(\Omega)$ sul duale forte $H^{-1,p}(\Omega)$ di $H_0^{1,p'}(\Omega)$, $\left(\text{essendo } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

Ci si può chiedere se, assumendo

$$\text{(II)} \qquad S_u = H_0^{1,p}(\Omega) \quad , \quad S_f = H^{-1,p}(\Omega)$$

e supponendo (4) che T subordini un omeomorfismo tra un intorno U dell'origine di $H_0^{1,p}(\Omega)$ e un intorno V dell'origine di $H^{-1,p}(\Omega)$, $T: H_0^{1,p}(\Omega) \to H^{-1,p}(\Omega)$ sia differenziabile in 0.

La risposta è ancora negativa sempre in virtù del Teorema 1 di [7].

Per convincersene si ragioni come nel caso precedente, tenendo presente che A è un operatore continuo di $(L^p(\Omega))^n$ in sé.

Pertanto *la linearizzazione* (PL) *del problema* (P) *non è ammissibile nemmeno rispetto alla scelta* (II) *degli spazi* S_u *e* S_f.

3. ESEMPI DI LINEARIZZAZIONI AMMISSIBILI TEOREMI DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALI

Consideriamo le ipotesi (2), (3) su a e consideriamo un ulteriore restringimento (con raffinamento delle topologie) di S_u e S_f; precisamente assumiamo

$$\text{(III)} \qquad S_u = H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega) \quad , \quad S_f = L^p(\Omega).$$

Rispetto alla scelta (III) *degli spazi* S_u e S_f *la linearizzazione* (PL) *del problema* (P) *è ammissibile per ogni* $p > n$ *se* $a_i \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$ e Ω *sufficientemente regolare.*

Anzi sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Se* $a \in (C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n))^n$ *e verifica* (2), (3), *se* $p > n$ *e* Ω *è sufficientemente regolare* [per esempio di classe $C^{2,\lambda}$ e immagine bilipschitziana di

(4) Vale un'osservazione analoga a quella fatta in (3).

un cubo], *allora esistono un intorno aperto* U *dell'origine in* $H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ *e un intorno aperto* V *dell'origine in* $L^p(\Omega)$ *tali che* T *è un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V (cioè T è una biiezione di U su V differenziabile con continuità assieme alla sua inversa).

Dimostrazione. Dal Teorema 2 di [7] segue immediatamente che, se Ω ha la proprietà di cono e $a_i \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$, allora, per ogni $p > n$, T è un operatore di $H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ differenziabile con continuità e risulta $T'(0) = T_L$.

Inoltre (vedi [2]), se le funzioni $x \to \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0)$ hanno le derivate prime hölderiane in $\overline{\Omega}$ e Ω è sufficientemente regolare (per esempio di classe $C^{2,\lambda}$ e immagine bilipschitziana di un cubo], allora, sussistendo (2) e (3), T_L è un isomorfismo di $H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$. (Vedi anche [4]).

Pertanto il Teorema 1 è una conseguenza del noto Teorema di inversione locale di una applicazione differenziabile con continuità tra spazi di Banach [5].

Sempre conservando (2), (3), consideriamo infine il caso [6]

$$\text{(IV)} \qquad S_u = \{u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad , \quad S_f = C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) , \qquad (0 < \lambda < 1) .$$

La linearizzazione del problema (P) *è ammissibile rispetto alla scelta* (IV) *degli spazi* S_u, S_f *se* $a_i \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$ *e* Ω *è di classe* $C^{2,\lambda}$ *e connesso*. Anzi sussiste il seguente

TEOREMA 2. *Se* $a \in (C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n))^n$ *e verifica* (2), (3) *e* Ω *è di classe* $C^{2,\lambda}$, $(0 < \lambda < 1)$, *e connesso* [7] *allora esistono un intorno aperto* U *dell'origine nel sottospazio* $\{u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ *di* $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ *e un intorno aperto* V *dell'origine in* $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ *tali che* T *è un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V.

(5) Questo Teorema afferma che, *se* E, F *sono spazi di Banach*, $u_0 \in E$ *e* T *è un'applicazione di un intorno aperto di* u_0 *in* F *differenziabile con continuità e tale che* $T'(u_0)$ *sia un isomorfismo di* E *su* F, *allora esistono in intorno aperto* U *di* u_0 *e un intorno aperto* V *di* Tu_0 *tali che* T *sia un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V. (vedi ad esempio [3], Teorema 4.2.1, o [5], Teorema 5.4).

(6) Per m intero ≥ 0, $\lambda \in \mathbf{R}$, $0 < \lambda \leq 1$, $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ denota lo spazio (di Banach) delle funzioni $u \in C^m(\overline{\Omega})$ aventi le derivate di ordine m hölderiane in $\overline{\Omega}$ con esponente λ, dotato della norma $\|\cdot\|_{m,\lambda}$ definita da

$$\|u\|_{m,\lambda} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| = m} \sup_{\substack{x', x'' \in \overline{\Omega} \\ x' \neq x''}} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|}{|x' - x''|^\lambda} .$$

(7) Non è difficile dimostrare che, se Ω è connesso e di classe C^1, allora per ogni $x', x'' \in \Omega$ esiste un arco in Ω rettificabile che li congiunge la cui lunghezza è maggiorata da un multiplo prefissato di $|x' - x''|$ e, di conseguenza, si ha

$$(*) \qquad \sup_{\substack{x', x'' \in \overline{\Omega} \\ x' \neq x''}} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\lambda} \leq c_\lambda \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \qquad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})$$

con c_λ numero positivo indipendente da u.

Dimostrazione. Dal Teorema 3 di [7] discende che, se Ω è convesso [o, più in generale, se Ω è tale che sussista, la (*) di [7]] e $a \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$, allora T è un operatore di $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ in $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $(0 < \lambda \leq 1)$, differenziabile con continuità e risulta $T'(0) = T_L$.

Inoltre, (vedi [1], Teorema 16.III), se le funzioni $x \to \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x, 0)$ appartengono a $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $(0 < \lambda < 1)$ e Ω è connesso e di classe $C^{2,\lambda}$, allora, sussistendo (2), (3), T_L è un isomorfismo del sottospazio $\{u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ di $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ su $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Per ottenere il Teorema 2 basta, perciò, applicare il suaccennato Teorema di inversione locale di un'applicazione differenziabile con continuità tra spazi di Banach.

OSSERVAZIONE. Si capisce come la questione dell'ammissibilità di una linearizzazione possa porsi per altri problemi al contorno relativi a T, con condizioni al contorno omogenee e anche non omogenee: in quest'ultimo caso si prenderà in considerazione l'operatore $T \times \tau$, ove τ è l'operatore frontiera.

Se abbiamo scelto – a titolo di esempio – il problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee, ciò non è solo per motivi di semplicità ma soprattutto perché gli esempi di non ammissibilità di una linearizzazione, che si possono ottenere sulla del Teorema 1 di [7], in questo caso sono evidentemente più significativi che in altri casi.

Per quanto riguarda il problema al contorno misto del tipo Dirichlet–Neumann, appare piuttosto problematica l'esistenza di qualche caso di ammissibilità di una linearizzazione (nel senso che qui si intende dare a questa locuzione); si pensi, infatti, che – mentre nel caso del problema di Dirichlet omogeneo il problema linearizzato è ben posto (se sussistono (2), (3) e se a e Ω sono sufficientemente regolati) per scelte di S_u [tipo (III) e (IV) tali che $S_u \subseteq C^1(\overline{\Omega})$ – ciò non accade, almeno in generale, nel caso del problema misto.

4. APPENDICE

Vedremo in questo numero che, se a ha una certa regolarità ed è tale che $a(x, y) = -a(x, -y)$, le condizioni (i), (ii) del n. 1, con $S_u = H_0^{1,p}(\Omega)$ e $S_f = H^{-1,p}(\Omega)$, non possono sussistere insieme (quando a non è lineare in y); e ciò indipendentemente dal fatto che T sia un omeomorfismo tra due intorni dell'origine di S_u e S_f e senza che necessariamente A mappi $(L^p(\Omega))^n$ in sé.

Questo è quanto afferma il Teorema 3. Proviamo intanto il seguente

LEMMA. *La funzione* $a : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *sia continua, abbia le derivate prime rispetto a* $y_1, \cdots, y_n$ *continue in* $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n$ *e sia tale che l'operatore* T (da essa generato) *considerato al n.* 1 *mappi* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *in* $H^{-1,p}(\Omega)$ [8].

(8) Ciò certamente è vero se a verifica (1).

Allora, se $T : H_0^{1,p}(\Omega) \to H^{-1,p}(\Omega)$ *è differenziabile in* o, *risulta*

$$T'(0)\,u = T_L\,u \qquad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{4}$$

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso in $H_0^{1,p}(\Omega)$ ed essendo evidentemente (per le ipotesi fatte su *a*) $T_L : H_0^{1,p}(\Omega) \to H^{-1,p}(\Omega)$ continuo, per dimostrare (4) basta provare che

$$T'(0)\,u = T_L\,u \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{5}$$

Sia pertanto $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Non è restrittivo supporre $a(x\,,0) = 0 \;\; \forall x \in \Omega$. Allora $T0 = 0$.

Dalla differenziabilità di T in o segue

$$\lim_{\substack{t \in \mathbf{R} \\ t \to 0}} \frac{T(tu)}{t} = T'(0)\,u\,,$$

da cui

$$\lim_{\substack{t \in \mathbf{R} \\ t \to 0}} \left\langle \frac{T(tu)}{t}\,,\varphi \right\rangle = \langle T'(0)\,u\,,\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

ove $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ denota la dualità tra $H_0^{1,p'}(\Omega)$ e $H^{-1,p}(\Omega)$.

Ricordando che $Tu = D^* ADu$ e $T_L\,u = D^* LDu$, si ha

$$\left\langle \frac{T(tu)}{t}\,,\varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{A_i(t\,Du)}{t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \tag{7}$$

$$\langle T_L\,u\,,\varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (L_i\,Du)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{8}$$

D'altra parte si ha facilmente

$$\lim_{\substack{t \in \mathbf{R} \\ t \to 0}} \frac{A_i(t\,Du)}{t}(x) = (L_i\,Du)(x) \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Inoltre, osservando che

$$\frac{A_i(t\,Du)}{t}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial y_j}(x\,,t\xi(x\,,t)\,Du(x))\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

con $|\xi(x\,,t)| < 1$ e tenendo presenti le ipotesi su *a* e il fatto che $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, si riconosce che la funzione

$$\mathbf{R} \setminus \{0\} \ni t \to \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{A_i(t\,Du)}{t}(x) \right|$$

è limitata in ogni intorno limitato di o in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Pertanto, in virtù del Teorema della convergenza dominata di Lebesgue, risulta

$$\lim_{\substack{t\in\mathbf{R}\\ t\to 0}} \int_\Omega \frac{A_i(t\,Du)}{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega (L_i\,Du)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\,. \tag{9}$$

Da (6), (7), (8), (9) segue $\langle T'(0)\,u\,,\varphi\rangle = \langle T_L\,u\,,\varphi\rangle$ $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, donde (5).

TEOREMA 3. *Valgano per la funzione* $a:\Omega\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *le ipotesi fatte nel Lemma precedente e inoltre sia*

$$a(x\,,y) = -\,a(x\,,-y) \qquad \forall\,(x\,,y)\in\Omega\times\mathbf{R}^n. \tag{10}$$

Se $T:H_0^{1,p}(\Omega)\to H^{-1,p}(\Omega)$ *è differenziabile in* o *e* $T'(0)$ *è un isomorfismo di* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *su* $H^{-1,p}(\Omega)$, *allora la funzione* a *è lineare in* y.

Dimostrazione. La condizione (10) implica $T0=0$. Per il Lemma precedente si ha

$$T'(0)\,u = T_L\,u \qquad \forall u\in H_0^{1,p}(\Omega)\,, \tag{11}$$

donde

$$Tu - T'(0)\,u = D^*(ADu - LDu) \qquad \forall u\in H_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Posto

$$\omega u = ADu - LDu\,,$$

dalla differenziabilità di $T:H_0^{1,p}(\Omega)\to H^{-1,p}(\Omega)$ in o segue

$$\lim_{\|u\|_{1,p}\to 0}\frac{\|D^*\omega u\|_{-1,p}}{\|u\|_{1,p}} = 0\,, \tag{12}$$

ove $\|\cdot\|_{-1,p}$ è la norma di $H^{-1,p}(\Omega)$.

Sia per assurdo a non lineare in y. Allora $D^*\circ\omega : H_0^{1,p}(\Omega)\to H^{-1,p}(\Omega)$ non è nullo; anzi non è nulla nemmeno la sua restrizione a $\mathscr{D}(\Omega)$.

Infatti, se fosse $D^*\omega u = 0$ $\forall u\in\mathscr{D}(\Omega)$, cioè $Tu = T'(0)\,u$ $\forall u\in\mathscr{D}(\Omega)$, allora, essendo per ipotesi $T'(0)$ un isomorfismo di $H_0^{1,p}(\Omega)$ su $H^{-1,p}(\Omega)$, $AD(\mathscr{D}(\Omega))$ sarebbe uno spazio vettoriale (isomorfo algebricamente a $T(\mathscr{D}(\Omega))$ mediante D^*) e A sarebbe un operatore lineare di $D(\mathscr{D}(\Omega))$ su $AD(\mathscr{D}(\Omega))$; di conseguenza a sarebbe lineare in y in quanto da $A(\lambda Du + \mu Dv) = \lambda ADu + \mu ADv$ $\forall u\,,v\in\mathscr{D}(\Omega)$ e $\forall\lambda\,,\mu\in\mathbf{R}$, cioè da $a(x\,,\lambda Du(x) + \mu Dv(x)) = \lambda a(x\,,Du(x)) + \mu a(x\,,Dv(x))$ $\forall u,v\in\mathscr{D}(\Omega)$, $\forall\lambda\,,\mu\in\mathbf{R}$ e $\forall x\in\Omega$, segue $a(x\,,\lambda y + \mu z) = \lambda a(x\,,y) + \mu a(x\,,z)$ $\forall x\in\Omega$ e $\forall y\,,z\in\mathbf{R}^n$, perchè, prefissato arbitrariamente $x\in\Omega$, per ogni $y\,,z\in\mathbf{R}^n$ esistono $u\,,v\in\mathscr{D}(\Omega)$ tali che $Du(x) = y$ e $Dv(x) = z$.

Sia dunque $u_0\in\mathscr{D}(\Omega)$ tale che

$$D^*\omega u_0 \neq 0\,.$$

Allora esiste $v_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ per cui $\int\limits_{\Omega} v_0 \, \mathrm{D}^* \omega u_0 \, \mathrm{d}x \neq 0$, cioè per cui

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \omega_i u_0 \, \mathrm{d}x \neq 0, \tag{13}$$

ove $\omega_i u = \mathrm{A}_i \mathrm{D}u - \mathrm{L}_i \mathrm{D}u$.

Per le ipotesi fatte su a risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \omega_i u_0 \in \mathrm{C}^0(\Omega), \tag{14}$$

epperò da (13) segue che esistono un aperto Ω_0 in Ω e un numero positivo c tali che in Ω_0 la funzione (14) è sempre $\geq c$ oppure sempre $\leq -c$; sia, ad esempio,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \omega_i u_0 \geq c \qquad \text{in} \quad \Omega_0. \tag{15}$$

Con una tecnica sostanzialmente analoga a quella usata per dimostrare il Teorema 1 di [7] si riesce a costruire una successione $(\tilde{u}_m, \tilde{v}_m)_{m\in\mathbf{N}}$ in $\mathrm{H}_0^{1,p}(\Omega) \times \mathrm{H}_0^{1,p'}(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

(*a*) $(\|\tilde{u}_m\|_{1,p})_{m\in\mathbf{N}}$ e $(\|\tilde{v}_m\|_{1,p'})_{m\in\mathbf{N}}$ sono infinitesime rispettivamente di ordine $1/p$ e $1/p'$ rispetto a $(\mathrm{mis}\,(\mathrm{supp}\,\tilde{u}_m \cap \mathrm{supp}\,\tilde{v}_m))_{m\in\mathbf{N}}$, [ove mis sta per misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ e supp sta per supporto].

(*b*) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial x_i} \omega_i \tilde{u}_m \geq c/2 \qquad \text{su} \quad \mathrm{supp}\,\tilde{u}_m \cap \mathrm{supp}\,\tilde{v}_m.$$

Per realizzare la condizione (b) si sfruttano le ipotesi di regolarità di a e soprattutto l'ipotesi (10); si pensi infatti che $\tilde{u}_m$ e $\tilde{v}_m$ (costruito con un procedimento analogo a quello usato nella dimostrazione del Teorema 1 di [7] per contruire $\tilde{v}_m$) si ottengono componendo un diffeomorfismo con una funzione ottenuta mediante un « prolungamento simmetrico » rispetto a un iperpiano e che il gradiente di quest'ultima funzione assume pertanto valori opposti in punti simmetrici rispetto a tale iperpiano.

In definitiva si ha

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|\mathrm{D}^* \omega \tilde{u}_m\|_{-1,p}}{\|\tilde{u}_m\|_{1,p}} \geq \lim_{m\to\infty} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial x_i} \omega_i \tilde{u}_m \, \mathrm{d}x \right|}{\|\tilde{u}_m\|_{1,p} \, \|\tilde{v}_m\|_{1,p'}} \geq$$

$$\geq \lim_{m\to\infty} \frac{c}{2} \frac{\mathrm{mis}\,(\mathrm{supp}\,\tilde{u}_m \cap \mathrm{supp}\,\tilde{v}_m)}{\|\tilde{u}_m\|_{1,p} \, \|\tilde{v}_m\|_{1,p'}} \neq 0$$

e ciò è in contraddizione con (12), donde la conclusione.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO (1965) - *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$, «Annali di Matematica», *69*, 321, 381.

[2] S. CAMPANATO e G. STAMPACCHIA (1965) - *Sulle maggiorazioni in* L^p *nella teoria delle equazioni ellittiche*, «Boll. U.M.I.», *20*, 393-398.

[3] M. H. CARTAN (1971) - *Calcul différentiel dans les espaces de Banach*, Hermann Paris.

[4] F. E. BROWDER (1960) - *A priori estimates for solutions of elliptic boundary-value problems*, «Indagationes Math.», *22*, 145-169.

[5] MAGENES e G. STAMPACCHIA (1958) - *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, «Annali Sc. Normale Sup. Pisa», *12*, 247-358.

[6] G. PRODI e A. AMBROSETTI (1973) - *Analisi non lineare*, I Quaderno, Sc. Nornale Sup. Pisa.

[7] T. VALENT - *Sulla differenziabilità dell'operatore di Newytsky*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», fasc. n. 1-2 di questo stesso volume.