Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tullio Valent

Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.1-2, p. 15–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_1-2_15_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Analisi matematica. — *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky* (*). Nota (**) di TULLIO VALENT, presentata dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — The main result of this paper is a non-differentiability Theorem (Theorem 1) for a superposition operator, i.e. the Nemytsky operator.

Two more differentiability theorems are proved (Theorems 2 and 3).

The paper " Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale " (following the present one in these " Rendiconti ") contains some consequences of Theorems 1, 2, 3 concerning certain problems connected with the study of a special class of nonlinear differential operators.

Il risultato principale di questa Nota è un Teorema di non differenziabilità (il Teorema 1) per un operatore non lineare: l'operatore cosiddetto di Nemytsky.

Vengono poi dimostrati due Teoremi di differenziabilità (i Teoremi 2 e 3).

Alcune conseguenze dei Teoremi 1, 2, 3 – riguardanti talune questioni connesse con lo studio di un certo tipo di operatori differenziali quasi-lineari del second'ordine – saranno messe in evidenza nella Nota « Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale » che seguirà la presente Nota su questi « Rendiconti ».

1. UN TEOREMA DI NON DIFFERENZIABILITÀ

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, p e q due numeri reali ≥ 1, $L^p(\Omega)$ lo spazio delle (classi) di funzioni reali di potenza p-ma sommabile in Ω, $H^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D\,u \in (L^p(\Omega))^n\}$, ove

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{i=1,\cdots,n}.$$

$H^{1,p}(\Omega)$ sia dotato della norma $\|\cdot\|_{1,p}$ definita da

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p ,$$

ove $\|\cdot\|_p$ è la norma di $L^p(\Omega)$.

$H_0^{1,p}(\Omega)$ denoterà la chiusura in $H^{1,p}(\Omega)$ dell'insieme $\mathscr{D}(\Omega)$ delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1978.

Sia $(x, y) \to a(x, y)$ una funzione di $\Omega \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ verificante la condizione di Caratheodory: $y \to a(x, y)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e $x \to a(x, y)$ è misurabile per ogni $y \in \mathbf{R}^n$.

Per ogni funzione $\tau : \Omega \to \mathbf{R}^n$ sia $A\tau : \Omega \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$A\tau(x) = a(x, \tau(x)) . \tag{1}$$

È noto (vedi [1], o [2] Theorema 17.1 e 17.6) che, se

$$\tau \in (L^p(\Omega))^n \Rightarrow A\tau \in L^q(\Omega) ; \tag{2}$$

allora $A : (L^p(\Omega))^n \to L^q(\Omega)$ è continuo e che (2) sussiste se e solo se esistono $b \in L^p(\Omega)$ e $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, tali che

$$|a(x, y)| \leq b(x) + k|y|^{p/q} \qquad \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

essendo $|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

È anche noto (vedi [2], Teorema 20.1) che, sussistendo (2), *se* $p \leq q$ *l'operatore* (di Nemytsky) $A : (L^p(\Omega))^n \to L^q(\Omega)$, *definito* in (1), è *differenziabile* (secondo Fréchet) *in qualche* $\tau \in (L^p(\Omega))^n$ (*se e*) *solo se la funzione* a *è affine in* y.

In certe questioni legate allo studio del problema di Dirichlet per un operatore differenziale T del tipo

$$Tu = D^* a(x, Du) ,$$

ove D^* è il trasposto formale di D, ha interesse sapere se un fatto analogo sussiste anche per la restrizione di A al sottospazio

$$D(H_0^{1,p}(\Omega)) = \{Du : u \in H_0^{1,p}(\Omega)\}$$

di $(L^p(\Omega))^n$.

Si osservi che, per la disuguaglianza di Poincaré, D è un isomorfismo dello spazio di Banach $H_0^{1,p}(\Omega)$ sul sottospazio $D(H_0^{1,p}(\Omega))$ dello spazio di Banach $(L^p(\Omega))^n$; pertanto studiare la differenziabilità di $A : D(H_0^{1,p}(\Omega)) \to L^q(\Omega)$ equivale a studiare la differenziabilità di

$$N = A \circ D : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

che mappa $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ nell'elemento $Nu \in L^q(\Omega)$ definito da

$$Nu(x) = a(x, Du(x)) , \qquad x \in \Omega. \tag{4}$$

TEOREMA 1. *La funzione* $a : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *sia continua e tale che* $\frac{\partial a}{\partial y_i}(x, 0)$, $(i = 1, \cdots, n)$, *esistano* $\forall x \in \Omega$ *risultando continue in* Ω *le funzioni* $x \to \frac{\partial a}{\partial y_i}(x, 0)$.

Inoltre a sia tale che l'operatore N *definito da* (4) *mappi* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *in* $L^q(\Omega)$. [Ciò è certamente vero se vale (3)].

Se $N : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *è differenziabile* (secondo Fréchet) *nell'origine e* $p \leq q$, *allora la funzione* $\Omega \times \mathbf{R}^n \ni (x, y) \to a(x, y) - a(x, 0)$ *è lineare in* y [(1)].

Dimostrazione. Dimostrare il Teorema 1 equivale, evidentemente, a dimostrare che, nelle ipotesi fatte su a, dalla differenziabilità nell'origine di $N : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, con $p \leq q$, segue la linearità in y di a se $a(x, 0) = 0$ $\forall x \in \Omega$.

Sia pertanto

$$a(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Si osservi che, detto $N'(0)$ il differenziale di N in 0, per ogni $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$(5) \qquad N'(0)\, u : x \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \qquad \text{per quasi ogni} \quad x \in \Omega.$$

Infatti, dalla differenziabilità di N in 0 segue immediatamente

$$\lim_{\substack{t \in \mathbf{R} \\ t \to 0}} \frac{N(tu)}{t} = N'(0)\, u \qquad \text{in} \quad L^q(\Omega),$$

donde l'esistenza di una successione $(t_k)_{k \in \mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}$ convergente descrescendo a zero tale che

$$(6) \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{a(x, t_k Du(x))}{t_k} = (N'(0)\, u)(x) \qquad \text{per quasi ogni} \quad x \in \Omega,$$

donde infine (5), ricordando che la funzione $t \to a(x, t\, Du(x))$ è derivabile in $t = 0$ $\forall x \in \Omega$ e che la sua derivata in $t = 0$ è il limite a primo membro di (6).

Posto, per ogni $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\omega u = Nu - N'(0)\, u,$$

si ha

$$(7) \qquad \lim_{\|u\|_{1,p} \to 0} \frac{\|\omega u\|_q}{\|u\|_{1,p}} = 0.$$

(1) Alla tesi di questo Teorema si può arrivare – con una dimostrazione di altro tipo – facendo ipotesi più deboli su a, come risulterà in un lavoro successivo a questo (T. VALENT e G. ZAMPIERI: *Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari*) che apparirà sui «Rend. Sem. Mat. di Padova», ove sarà considerato il caso $a : \Omega \times \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$, $u : \Omega \to \mathbf{R}^n$.

Tuttavia la tecnica dimostrativa usata qui consente di ottenere il Teorema 3 della Nota *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale* che segue la presente Nota, su questi « Rendiconti ».

Supponiamo, per assurdo, che a non sia lineare in y. Allora $\omega : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ non è nullo; anzi non è nulla neppure la sua restrizione a $\mathscr{D}(\Omega)$.

Infatti, se $\omega u = 0 \; \forall u \in \mathscr{D}(\Omega)$, cioè se $a(x, Du(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ $\forall u \in \mathscr{D}(\Omega)$ e $\forall x \in \Omega$, risulta $a(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i}(x, 0)\, y_i \;\; \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$, perché, fissato (arbitrariamente) $x \in \Omega$, per ogni $y \in \mathbf{R}^n$ esiste $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $Du(x) = y$.

Sia pertanto $u_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\omega u_0 \neq 0$. Avendo supposto $a(x, 0) = 0$ $\forall x \in \Omega$, si ha $u_0 \neq 0$.

Poiché la funzione $\omega u_0 : \Omega \to \mathbf{R}$ è continua e non nulla esistono un numero positivo c e una palla aperta Ω_0 di $\mathbf{R}^n$ contenuta in Ω tali che

$$|\omega u(x)| \geq c \qquad \forall x \in \Omega_0 . \tag{8}$$

Sia

$$\mathscr{M} = \{x \in \overline{\Omega}_0 : u_0(x) = \max_{x \in \overline{\Omega}_0} u_0(x)\} .$$

Distinguiamo due casi:

1° Caso: $\mathscr{M} \subseteq \Omega_0 .$

Detta $(l_m)_{m \in \mathbf{N}}$ una successione in $\mathbf{R}$ crescente e convergente a $\max_{x \in \overline{\Omega}_0} u_0(x)$, poniamo

$$u_m = \sup(u_0 - l_m, 0), \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

Non è difficile riconoscere che $u_m \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

Inoltre è chiaro che $Du_m = Du_0$ su supp u_m (= supporto di u_m) e che, se $\overline{m}$ è sufficientemente grande, supp $u_m \subseteq \Omega_0 \; \forall m \geq \overline{m}$.

In virtù di (8) si ha facilmente (indicando con mis la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$)

$$\frac{\|\omega u_m\|_q}{\|u_m\|_{1,p}} \geq \frac{c\,[\text{mis}(\text{supp}\, u_m)]^{1/q}}{(\sup_{x \in \overline{\Omega}_0} |u_0(x)| + n \sup_{x \in \overline{\Omega}_0} |Du_0(x)|)\,[\text{mis}(\text{supp}\, u_m)]^{1/p}} \qquad \forall m \geq \overline{m};$$

ciò è in contraddizione con (7) perché $\|u_m\|_{1,p} \to 0$ e, essendo $p \leq q$, risulta

$$\lim_{m \to \infty} [\text{mis}(\text{supp}\, u_m)]^{1/q - 1/p} \geq 1 .$$

Pertanto a è lineare in y.

2° Caso: $\mathscr{M} \cap \partial\Omega_0 \neq \varnothing .$

Non è restrittivo, in quel che segue, supporre Ω_0 tale che

$$\mathscr{M} \cap \Omega_0 = \varnothing \quad , \quad \mathscr{M} \cap \partial\Omega_0 \text{ ha un solo punto, diciamolo } x_0 .$$

Infatti, poiché u_0 non è costante in Ω_0 [altrimenti sarebbe $\omega u_0|_{\Omega_0} = 0$, in contraddizione con (8)] e $\mathscr{M}$ è chiuso, esiste una palla aperta di $\mathbf{R}^n$ contenuta in Ω_0, disgiunta da $\mathscr{M}$ e tale che la sua frontiera intersechi $\mathscr{M}$ in un solo punto; basterà, allora, sostituire Ω_0 con questa palla.

Esistono senz'altro un intorno aperto $\Omega(x_0)$ di x_0 in $\mathbf{R}^n$ e un diffeomorfismo $\mathscr{T}$ di $\overline{\Omega(x_0)}$ su $\overline{S(1)}$, ove $S(1) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, che mappa $\Omega(x_0) \cap \Omega$ su $S^*(1) = \{x \in S(1) : x_n > 0\}$ e $\Omega(x_0) \cap \partial\Omega_0$ su $\partial_1 S^*(1) = \{x \in \overline{S^*(1)} : x_n = 0\}$.

Sia $l_0 \in \mathbf{R}$, $l_0 < u_0(x_0)$ tale che $u_0 - l_0 \leq 0$ in un intorno di $\partial\Omega(x_0) \cap \partial\Omega_0$: un tale l_0 esiste perché x_0 è un punto di massimo proprio per $u_0/\overline{\Omega}_0$.

Indichiamo con v_0 la restrizione di $\sup(u_0 - l_0, 0)$ a $\overline{\Omega(x_0)} \cap \overline{\Omega}_0$: in simbolo

$$v_0 = \sup(u_0 - l_0, 0)\,|_{\overline{\Omega(x_0)} \cap \overline{\Omega}_0}.$$

A v_0 resta associata, tramite $\mathscr{T}$, la funzione $w_0 : \overline{S^*(1)} \to \mathbf{R}$ definita da

$$w_0 = v_0 \circ \mathscr{T}^{-1}.$$

Il prolungamento simmetrico, rispetto a $\partial_1 S^*(1)$, di w_0 a $\overline{S(1)}$ sia $\overline{w}_0$: $\overline{w}_0$ assuma, cioè, lo stesso valore in due punti di $\overline{S(1)}$ se essi sono simmetrici rispetto a $\partial_1 S^*(1)$.

Allora $\overline{v}_0 = \overline{w}_0 \circ \mathscr{T}$ è un prolungamento di v_0 a $\overline{\Omega(x_0)}$.

Prolunghiamo quindi $\overline{v}_0$ *a* Ω ponendo

$$\tilde{v}_0(x) = \overline{v}_0(x) \quad \text{se} \quad x \in \overline{\Omega(x_0)} \quad , \quad \tilde{v}_0(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \overline{\Omega(x_0)}.$$

Non è difficile riconoscere che

$$(9) \qquad \tilde{v}_0 \in H_0^{1,p}(\Omega) \quad , \quad \operatorname{supp} \tilde{v}_0 \subseteq \Omega(x_0) \quad , \quad D\tilde{v}_0 = Du_0 \quad \text{su} \quad \operatorname{supp} \tilde{v}_0 .$$

Sia $(l_m)_{m \in \mathbf{N}}$ una successione crescente in $\mathbf{R}$ tale che $l_1 > l_0$ e $\lim_{m \in \mathbf{N}} l_m = u_0(x_0)$.

Per ogni $m = 1, 2, \cdots$ poniamo

$$v_m = \sup(u_0 - l_m, 0)\,|_{\overline{\Omega(x_0)} \cap \overline{\Omega}_0}.$$

Con la tecnica usata sopra, a partire da v_m si costruisce $\tilde{v}_m : \Omega \to \mathbf{R}$ avente le proprietà seguenti

$$(10) \qquad \tilde{v}_m \in H_0^{1,p}(\Omega) \quad , \quad \operatorname{supp} \tilde{v}_m \subseteq \Omega(x_0) \quad , \quad D\tilde{v}_m = Du_0 \quad \text{su} \quad \operatorname{supp} \tilde{v}_m .$$

La successione $(\tilde{v}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ è decrescente e si ha, evidentemente, $\lim_{m \to \infty} [\operatorname{sim}(\operatorname{supp} \tilde{v}_m)] = 0$, donde

$$(11) \qquad \lim_{m \to \infty} \|\tilde{v}_m\|_{1,p} = 0 .$$

Poniamo, per $m = 0, 1, 2, \cdots$,

$$K_m = \operatorname{supp} \tilde{v}_m \quad , \quad K'_m = \overline{\Omega}_0 \cap \operatorname{supp} \tilde{v}_m .$$

Indicando con J lo Jacobiano di $\mathfrak{G}$, si ha facilmente

$$\text{mis } K_m \leq \text{mis } \mathfrak{G}(K_m) \max_{y \in \mathfrak{G}(K_0)} |J^{-1}(y)| = \tag{12}$$

$$= 2 \text{ mis } \mathfrak{G}(K'_m) \max_{y \in \mathfrak{G}(K_0)} |J^{-1}(y)| \leq 2 \text{ mis } (K'_m) \max_{x \in K_0} |J(x)| .$$

Ricordando (8), (10), (12) si riconosce che

$$\frac{\|\omega \tilde{v}_m\|_q}{\|\tilde{v}_m\|_{1,p}} \geq \frac{c \,(\text{mis } K'_m)^{1/q}}{(\sup\limits_{x \in K_0} |\tilde{v}_0(x)| + n \sup\limits_{x \in K_0} |D\tilde{v}_0(x)|)(\text{mis } K_m)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{c}{(2 \max\limits_{x \in K_0} |J(x)|)^{1/p} (\sup\limits_{x \in K_0} |\tilde{v}_0(x)| + n \sup\limits_{x \in K_0} |D\tilde{v}_0(x)|)} (\text{mis } K'_m)^{1/p - 1/q} .$$

Ciò è in contraddizione con (7); infatti vale (11) e, essendo $p \leq q$, si ha

$$\lim_{m \to \infty} (\text{mis } K'_m)^{1/q - 1/p} \geq 1 ;$$

pertanto a è lineare in y. Q.E.D.

2. Due teoremi di differenziabilità

Siano, ancora, Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $(x, y) \to a(x, y)$ una funzione di $\Omega \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$.

Teorema 2. *Se* Ω *ha la proprietà di cono* [2] *e* $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$, *allora, per ogni* $p > n$, *l'operatore* A *definito in* (1) *mappa* $(H^{1,p}(\Omega))^n$ *in* $H^{1,p}(\Omega)$, $A : (H^{1,p}(\Omega))^n \to H^{1,p}(\Omega)$ è *differenziabile con continuità e risulta, per ogni* $\sigma, \tau \in (H^{1,p}(\Omega))^n$,

$$A'(\sigma)\tau : x \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i}(x, \sigma(x)) \tau_i(x) , \qquad (x \in \Omega) . \tag{13}$$

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicità, che a sia una funzione di $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, per ogni $u \in H^{1,p}(\Omega)$, poniamo

$$Au(x) = a(x, u(x)) , \qquad (x \in \Omega) . \tag{14}$$

(2) Si dice che Ω ha la proprietà di cono se esistono due numeri positivi α, h tali che per ogni $x \in \Omega$ si può costruire un cono circolare retto C_x con il vertice in x, di apertura α, di altezza h, tale che $C_x \subseteq \Omega$.

Mostriamo che, se Ω ha la proprietà di cono e $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$, allora per ogni $p > n$ l'operatore A definito in (14) mappa $H^{1,p}(\Omega)$ in $H^{1,p}(\Omega)$, $A: H^{1,p}(\Omega) \to H^{1,p}(\Omega)$ è differenziabile con continuità e risulta, per ogni $u, v \in H^{1,p}(\Omega)$,

$$(13') \qquad A'(u)\, v : x \to \frac{\partial a}{\partial y}(x, u(x))\, v(x), \qquad (x \in \Omega).$$

Risulterà poi evidente come si debba complicare la dimostrazione per ottenere il Teorema 2.

Per $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$, siano $A_{x_i} u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$, $A_y u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$, $A_{x_i y} u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$, $A_{yy} : \Omega \to \mathbf{R}$, $(i = 1, \cdots, n)$ definiti da

$$(15) \qquad A_{x_i} u(x) = \frac{\partial a}{\partial x_i}(x, u(x)) \quad , \quad A_y u(x) = \frac{\partial a}{\partial y}(x, u(x)),$$

$$A_{x_i y} u(x) = \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial y}(x, u(x)) \quad , \quad A_{yy} u(x) = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}(x, u(x)).$$

Ricordiamo che, in base al notissimo Lemma di Sobelev, se Ω ha la proprietà di cono e $p > n$, ogni elemento di $H^{1,p}(\Omega)$ è identificabile con una funzione (di Ω in $\mathbf{R}$) continua e risulta

$$(16) \qquad \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq c \|u\|_{1,p} \qquad \forall u \in H^{1,p}(\Omega),$$

ove c è un numero positivo indipendente da u.

Proviamo che, in virtù di (16), dal fatto che a possiede continue in $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}$ le derivate prime, segue che A *è un operatore continuo di* $H^{1,p}(\Omega)$ *in sé*, (se $p > n$).

In virtù di (16), se $a \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ e $u \in H^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$, si ha $Au, A_{x_i} u, A_\tau u \in L^\infty(\Omega)$; essendo, inoltre [(3)],

$$(17) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} Au = A_{x_i} u + \frac{\partial u}{\partial x_i} A_y u,$$

risulta $Au \in H^{1,p}(\Omega)$.

(3) Verifichiamo che, *se* $a \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ *e* $u \in H^{1,p}(\Omega)$, *con* $p > n$, vale (17).

Se $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ è una successione in $C^1(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_m \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$, [una tale successione certamente esiste in base al noto Teorema di Meyers e Serrin], si ha, per (16),

$$(*) \qquad C^1(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega) \ni Au_m \to Au \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad \text{e quindi in } L^p(\Omega);$$

inoltre

$$(*)\,(*) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} Au_m = A_{x_i} u_m + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} A_y u_m \to A_{x_i} u + \frac{\partial u}{\partial x_i} A_y u \quad \text{in } L^p(\Omega),$$

in quanto, per (16),

$$A_{x_i} u_m \to A_{x_i} u \ \text{in } L^\infty(\Omega) \ , \ A_y u_m \to A_y u \ \text{in } L^\infty(\Omega) \ \text{e} \ \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{in } L^p(\Omega).$$

Da (*), (*) (*) segue subito (17).

Se u, $u_0 \in H^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, si ha

$$\|Au - Au_0\|_p \leq \text{mis}(\Omega)^{1/p} \sup_{x\in\Omega} |Au(x) - Au_0(x)| \tag{18}$$

e, essendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(Au - Au_0) = (A_{x_i}u - A_{x_i}u_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}A_y u - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}A_y u_0\right) = \tag{19}$$

$$= (A_{x_i}u - A_{x_i}u_0) + (A_y u - A_y u_0)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right)A_y u_0,$$

risulta

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(Au - Au_0)\right\|_p \leq (\text{mis}\,\Omega)^{1/p} \sup_{x\in\Omega} |A_{x_i}u(x) - A_{x_i}u_0(x)| + \tag{20}$$

$$+ \sup_{x\in\Omega} |A_y u(x) - A_y u_0(x)| \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p + \sup_{x\in\Omega} |A_y u_0(x)| \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right\|_p.$$

Da (18), (20) segue la continuità di $A : H^{1,p}(\Omega) \to H^{1,p}(\Omega)$ in u_0, perché, in virtù di (16),

$$u \to u_0 \quad \text{in} \quad H^{1,p}(\Omega) \Rightarrow Au \to Au_0, A_{x_i}u \to A_{x_i}u_0, \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

$$A_y u \to A_y u_0 \quad \text{in} \quad L^\infty(\Omega).$$

Ragionando in maniera analoga sull'operatore A_y, si riconosce - utilizzando (16) - che, se $a \in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbf{R})$, allora A_y *è un operatore continuo di* $H^{1,p}(\Omega)$ *in sé*.

Fissato (arbitrariamente) $u \in H^{1,p}(\Omega)$, per ogni $v \in H^{1,p}(\Omega)$ sia $\varphi_u v : \Omega \to \mathbf{R}$ definita da $\varphi_u v : x \to \frac{\partial a}{\partial y}(x, u(x))\, v(x)$, cioè sia

$$\varphi_u v = vA_y u. \tag{21}$$

Da quanto detto sopra discende che φ_u è un'applicazione (lineare e) continua di $H^{1,p}(\Omega)$ in sé.

Verifichiamo che, per ogni $v \in H^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$\varphi_u v = \lim_{\substack{t\in\mathbf{R}\\ t\to 0}} \frac{A(u+tv) - Au}{t} \qquad \text{in} \quad H^{1,p}(\Omega); \tag{22}$$

ciò significa che A è differenziabile secondo Gâteaux in u e che $\varphi_u v$ è il valore che il differenziale di Gâteaux di A in u assume in v.

Facendo alcuni calcoli elementari si ottiene, infatti [4],

$$\frac{A(u+tv)-Au}{t}-\varphi_u v = v\int_0^1 [A_y(u+t\xi v)-A_y u]\,d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A(u+tv)-Au}{t}-\varphi_u v\right)=\int_0^1 [A_{x_i y}(u+t\xi v)-A_{x_i y}u]\,d\xi+ \tag{23}$$

$$+v\frac{\partial u}{\partial x_i}\int_0^1 [A_{yy}(u+t\xi v)-A_{yy}u]\,d\xi+\frac{\partial v}{\partial x_i}[A_y(u+tv)-A_y u],$$

donde – ricordando che $a\in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbf{R})$ e che u, v sono limitate e hanno le derivate prime in $L^p(\Omega)$ –

$$\lim_{t\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\left|\left(\frac{A(u+tv)-Au}{t}-\varphi_u v\right)(x)\right|\right)=0,$$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{A(u+tv)-Au}{t}-\varphi_u v\right\|_p=0,$$

(4) Se $a\in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbf{R})$ e $u\in H^{1,p}(\Omega)$, con $p>n$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i}A_y u = A_{x_i y}u+\frac{\partial u}{\partial x_i}A_{yy}u. \tag{+}$$

La verifica è del tutto anologa a quella di (17) ([vedi [2]]).
Si osservi inoltre che, se $u, v\in H^{1,p}(\Omega)$, con $p>n$, risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)=\frac{\partial u}{\partial x_i}v+u\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Infatti, se $(u_m)_{m\in\mathbf{N}}$, $(v_m)_{m\in\mathbf{N}}$ sono successioni in $C^1(\Omega)\cap H^{1,p}(\Omega)$ tali che $u_m\to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$ e $v_m\to v$ in $H^{1,p}(\Omega)$, risulta, per (16).

$$C^1(\Omega)\cap H^{1,p}(\Omega)\ni u_m v_m\to uv \quad \text{in } L^p(\Omega) \tag{*}$$

perchè

$$\|u_m v_m - uv\|_p = \|(u_m-u)v_m+(v_m-v)u\|_p \le$$
$$\le \sup_{x\in\Omega}|v_m(x)|\,\|u_m-u\|_p+\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\,\|v_m-v\|_p$$

e perchè da $v_m\to v$ in $H^{1,p}(\Omega)$ segue che $(\|v_m\|_{1,p})_{m\in\mathbf{N}}$, e quindi anche $(\sup_{x\in\Omega}|v_m(x)|)_{m\in\mathbf{N}}$, è limitata; inoltre si ha

$$\frac{\partial(u_m v_m)}{\partial x_i}=\frac{\partial u_m}{\partial x_i}v_m+u_m\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i}v+u\frac{\partial v}{\partial x_i}\quad \text{in } L^p(\Omega) \tag{*)(*}$$

in quanto

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad\text{in } L^p(\Omega)\quad,\quad \frac{\partial v_m}{\partial x_i}\to\frac{\partial v}{\partial x_i}\quad \text{in } L^p(\Omega)$$

e, per (16), $u_m\to u$ in $L^\infty(\Omega)$ e $v_m\to v$ in $L^\infty(\Omega)$.
Da (*), (*) (*) segue subito (+).

da cui, infine,

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{A(u+tv)-Au}{t}-\varphi_u v\right\|_{1,p}=0.$$

Sussistendo (22), per dimostrare che $A: H^{1,p}(\Omega)\to H^{1,p}(\Omega)$ è differenziabile con continuità e che vale (13′) basta far vedere che l'applicazione $u\to\varphi_u$ di $H^{1,p}(\Omega)$ nello spazio normato delle applicazioni lineari e continue di $H^{1,p}(\Omega)$ in sé è continua, ossia che, per ogni prefissato $u_0\in H^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$u\to u_0 \quad \text{in } H^{1,p}(\Omega)\Rightarrow \sup_{0\neq v\in H^{1,p}(\Omega)}\frac{\|(\varphi_u-\varphi_{u_0})v\|_{1,p}}{\|v\|_{1,p}}\to 0. \tag{24}$$

Ricordando (21) e utilizzando (16) si ottiene senza difficoltà, per $u, u_0, v\in H^{1,p}(\Omega)$, la maggiorazione

$$\|(\varphi_u-\varphi_{u_0})v\|_{1,p}\leq 2c\|A_y u-A_y u_0\|_{1,p}\|v\|_{1,p},$$

donde

$$\sup_{0\neq v\in H^{1,p}(\Omega)}\frac{\|(\varphi_u-\varphi_{u_0})v\|_{1,p}}{\|v\|_{1,p}}\leq 2c\|A_y u-A_y u_0\|_{1,p},$$

donde, infine, (24), perché (com'è stato precedentemente notato) $A_y: H^{1,p}(\Omega)\to H^{1,p}(\Omega)$ è continuo. Q.E.D.

Per m intero ≥ 0, $\lambda\in\mathbf{R}$, $0<\lambda\leq 1$, sia $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ lo spazio (di Banach) delle funzioni $u\in C^m(\overline{\Omega})$ aventi le derivate di ordine m hölderiane in $\overline{\Omega}$ con esponente λ, dotato della norma $\|\cdot\|_{m,\lambda}$ definita da

$$\|u\|_{m,\lambda}=|u|_m+\sum_{|\alpha|=m}[D^\alpha u]_\lambda,$$

ove

$$|u|_m=\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|D^\alpha u(x)| \quad , \quad [v]_\lambda=\sup_{\substack{x',x''\in\overline{\Omega}\\ x'\neq x''}}\frac{|v(x')-v(x'')|}{|x'-x''|^\lambda}.$$

Se Ω è convesso, o – più in generale – se Ω è tale che, per ogni $x', x''\in\Omega$, esiste un arco in Ω rettificabile che li congiunge la cui lunghezza è maggiorata da un multiplo prefissato di $|x'-x''|$, è facile verificare che

$$[v]_\lambda\leq c_\lambda\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_0 \qquad \forall v\in C^1(\overline{\Omega}), \tag{25}$$

ove c_λ è un numero positivo indipendente da v, donde $C^1(\overline{\Omega})\subseteq C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ con iniezione continua.

Avendosi, ovviamente,

$$|u(x')v(x')-u(x'')v(x'')|\leq|u(x')-u(x'')||v(x')|+$$
$$+|v(x')-v(x'')||u(x'')|,$$

da $u, v \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ segue $uv \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ e

$$[uv]_\lambda \leq [u]_\lambda |v|_0 + |u|_0 [v]_\lambda, \tag{26}$$

donde

$$\|uv\|_{0,\lambda} \leq \|u\|_{0,\lambda} \|v\|_{0,\lambda}.$$

Si riconosce agevolmente che, se Ω è tale per cui sussiste (25), da $u, v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ segue $uv \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ e

$$\|uv\|_{1,\lambda} \leq k_\lambda \|u\|_{1,\lambda} \|v\|_{1,\lambda} \tag{27}$$

con k_λ numero positivo indipendente da u e da v.

TEOREMA 3. *Se Ω è tale per cui sussiste* (25) [per esempio convesso] *e* $a \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n)$, *allora, per* $0 < \lambda \leq 1$, *l'operatore* A *definito in* (1) *mappa* $(C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}))^n$ *in* $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $A : (C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}))^n \to C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ *è differenziabile con continuità e vale* (13) *per ogni* $\sigma, \tau \in (C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}))^n$.

Dimostrazione. Come s'è fatto nella dimostrazione del Teorema 2, conviene (onde evitare inessenziali complicazioni formali) supporre $a \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ e dimostrare che, se Ω è tale per cui sussiste (25), allora l'operatore A definito da (14) mappa $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in sé, $A : C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ è differenziabile con continuità e risulta (13') per ogni $u, v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$; sarà poi chiaro come si debba procedere per dimostrare il Teorema 3.

Proviamo che – sussistendo (25) – se $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$, allora A, *definito in* (14), *è un operatore continuo di* $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ *in sé.*

Innanzitutto, se $a \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ e $u \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, si ha evidentemente, [vedi (15)], $A_{x_i} u, A_y u \in C^1(\overline{\Omega})$, da cui, per (25), (26),

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Au = A_{x_i} u + \frac{\partial u}{\partial x_i} A_y u \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}),$$

ossia $Au \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$; dunque A mappa $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in sé.

Si osservi poi che $u \to u_0$ in $C^1(\overline{\Omega})$ implica $Au \to Au_0$ in $C^1(\overline{\Omega})$; per convincersene basta ricordare (19).

Scritta l'analoga di (19) per gli operatori A_{x_i} e A_y si vede che $u \to u_0$ in $C^1(\overline{\Omega})$ implica $A_{x_i} u \to A_i u_0$, $A_y u \to A_y u_0$ in $C^1(\overline{\Omega})$ e quindi, per (25), in $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Allora da (19) segue che $u \to u_0$ in $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ implica $Au \to Au_0$ in $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$; dunque $A : C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ è continuo.

Se $a \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$, una considerazione analoga a quella fatta per A si può fare ovviamente per A_y; così anche A_y *è un operatore continuo di* $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ *in sé*.

Analogamente si vede che $A_{x_i y}$ e A_{yy} sono operatori continui di $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Posto, per ogni u, $v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$,

$$\varphi_u v = v A_y u ,$$

dal fatto che A_y mappa $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in sé e da (27) segue che φ_u *è un operatore* (lineare) *continuo di* $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ *in sé.*

φ_u è il differenziale di Gâteaux di A in u, cioè $\forall v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ si ha

$$\varphi_u v = \lim_{\substack{t \in \mathbf{R} \\ t \to 0}} \frac{A(u + tv) - Au}{t} \qquad \text{in} \quad C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) .$$

Per convincersene basta ricordare (23) e tenere presente (26) oltre al fatto che A_y, $A_{x_i y}$, A_{yy} sono operatori continui di $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Infine, per provare la continuità di $u \to \varphi_u$ da $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ nello spazio normato delle applicazioni lineari e continue di $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ in sé, cioè per provare che

$$u \to u_0 \qquad \text{in} \quad C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \sup_{0 \neq v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})} \frac{\|(\varphi_u - \varphi_{u_0}) v\|_{1,\lambda}}{\|v\|_{1,\lambda}} \to 0 ,$$

si osservi che da (19) segue, per (27),

$$\|(\varphi_u - \varphi_{u_0}) v\|_{1,\lambda} = \|v (A_y u - A_y u_0)\|_{1,\lambda} \leq k_\lambda \|v\|_{1,\lambda} \|A_y u - A_y u_0\|_{1,\lambda} ,$$

donde

$$\sup_{0 \neq v \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})} \frac{\|(\varphi_u - \varphi_{u_0}) v\|_{1,\lambda}}{\|v\|_{1,\lambda}} \leq k_\lambda \|A_y u - A_y u_0\|_{1,\lambda}$$

e si ricordi che $A_y : C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ è continuo. Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. VAINBERG (1950) – *On the continuity of some operators of special type*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », *73*, 253–255.

[2] M. A. KRASNOSELSKIJ *et al.* (1976) – *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff Int. Publ., Leyden.