Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Marchi

La propagazione delle onde di piena

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.6, p. 594–602.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_6_594_0>

Meccanica dei fluidi. — *La propagazione delle onde di piena.* Nota (*) del Corrisp. ENRICO MARCHI.

SUMMARY. — An approximate model of *de Saint-Venant* equations is proposed to study the motion of a flood wave down a channel. Its validity is not restricted to mild bottom slopes and the resulting parabolic equation can be integrated even if the variation of the wave speed with the flow rate is taken into account.

1. Il moto gradualmente vario di una corrente liquida a superficie libera in un alveo quasi-cilindrico è rappresentato dal sistema iperbolico di due equazioni classiche dell'idraulica:

(*a*) l'equazione dinamica

$$i_f - j = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{1}$$

ottenuta dalla legge della quantità di moto sotto l'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni nelle sezioni normali della corrente e di moto in blocco nella direzione x (corrente lineare o monodimensionale);

(*b*) l'equazione di continuità

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

ottenuta dalla legge di conservazione della massa sotto la condizione di densità costante.

Il significato dei simboli è il seguente:

x variabile indipendente spaziale, misurata lungo la linea di fondo;

t variabile indipendente temporale;

U velocità media della corrente in una generica sezione normale;

Ω area della sezione normale;

Q portata della corrente nella stessa sezione: $Q = \Omega U$;

Y profondità della corrente, definita come quota del pelo libero rispetto ad una linea di fondo; effettiva, se il fondo è regolare, o assunta convenzionalmente in modo da mediarne le irregolarità;

i_f pendenza della linea di fondo;

j perdita di carico totale per unità di percorso della corrente per effetto delle resistenze di attrito.

(*) Presentata nella seduta del 15 giugno 1978.

L'equazione (1) fu proposta nel 1871 da *Barrè de Saint-Venant* [1], ma le espressioni per il calcolo delle dissipazioni energetiche, rappresentate dalla pendenza j, sono per la maggior parte posteriori a quella data e derivano dalle conoscenze sulla resistenza al moto delle correnti permanenti, ed in particolare delle correnti uniformi. Si può porre in generale

$$j = \frac{U^2}{gC^2 R} \tag{3}$$

avendo indicato con

R il raggio idraulico, definito dall'equazione $R = \Omega/P$ con

P il perimetro bagnato della sezione;

C un coefficiente adimensionale di resistenza, funzione delle irregolarità e della scabrezza dell'alveo rapportate al raggio idraulico e, secondariamente, del numero di Reynolds della corrente e della forma della sezione.

2. Note che siano le condizioni iniziali e quelle al contorno, il calcolo numerico per differenze finite consente l'integrazione del sistema di equazioni (1) e (2). Tuttavia, nello studio delle *onde di piena*, trovano ancora largo impiego per la loro praticità, e per la significatività dei risultati che ne derivano, alcuni modelli semplificati dell'equazione dinamica di *de Saint-Venant*. I più noti sono (cfr. [2], [3]):

- il modello detto « cinematico », che deriva dall'eq. (1) considerando assolutamente prevalenti gli effetti resistivi e riducendola alla

$$i_f - j = 0\,; \tag{4}$$

- il modello detto « parabolico », [4] che si ottiene dalla stessa eq. (1) trascurando solo i termini inerziali, per cui resta

$$i_f - j = \frac{\partial Y}{\partial x}\,. \tag{5}$$

L'equazione (4) impone una relazione fra l'area Ω della sezione e la portata Q, chiamata tradizionalmente « scala di deflusso »:

$$Q = Q\,(\Omega)\,. \tag{6}$$

Sostituendo la (6) nell'equazione di continuità (2), ed indicando con c la derivata parziale di Q rispetto ad Ω

$$c = \frac{dQ}{d\Omega} = c\,(Q) \tag{7}$$

si ottiene l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\,(Q)\,\frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,. \tag{8}$$

L'integrazione è immediata con il metodo delle caratteristiche, perché, definita tale famiglia di curve con l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = c(Q), \tag{9}$$

deriva che su di esse $dQ = 0$, ossia Q deve restare costante.

È evidente il significato di velocità di propagazione della grandezza c: *celerità dell'onda*. Poiché c risulta crescente con Q, la propagazione è accompagnata da una distorsione che tende a rendere il fronte dell'onda sempre più ripido con l'avanzamento.

Analogamente (si veda, ad esempio, [5]) dall'eq. (5) del modello parabolico e dall'equazione di continuità (2) si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q)\frac{\partial Q}{\partial x} = \nu(Q)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \tag{10}$$

nella quale il coefficiente ν vale

$$\nu = \frac{gC^2\,\Omega^2\,R}{2\,QB} \cong \frac{Q}{2\,i_f\,B}, \tag{11}$$

essendo B la larghezza del pelo libero della sezione di area Ω (1).

La presenza dell'ultimo termine, essendo sempre $\nu > 0$, mette in evidenza che la propagazione è accompagnata non solo da una distorsione ma anche da un'attenuazione del colmo dell'onda (sul quale è $\partial^2 Q/\partial x^2 < 0$).

Assegnata, per $x = 0$, la condizione al contorno

$$Q(0, t) = F(t) \qquad \forall t \geq 0, \tag{13}$$

e posta inoltre la condizione che Q sia limitata per $x \to \infty$, l'integrazione della (10) non presenta difficoltà se si linearizza l'equazione assumendo per c e ν valori *costanti*; il risultato è riportato in diverse pubblicazioni (come le già citate [3] e [5]) e riveste un notevole interesse applicativo. Tuttavia la limitazione a valori costanti di c e ν è abbastanza restrittiva; come si vedrà più avanti, la costanza di c si potrebbe anche rimuovere, ma sotto condizioni diverse da quelle premesse.

(1) La posizione espressa dall'eq. (5) del modello parabolico è equivalente ad assumere una scala di deflusso del tipo

$$Q = Q(\Omega) - \nu(Q)\frac{\partial\Omega}{\partial x} \tag{12}$$

dove ν è funzione di Q secondo la (11), ma potrebbe evidentemente esprimersi anche in funzione di Ω.

Va osservato che la scala di deflusso (6) potrebbe in generale cambiare da sezione a sezione, cioè essere del tipo $Q = Q(\Omega, x)$, senza con questo modificare l'equazione derivata (9), salvo introdurre una dipendenza da x anche nella celerità: $c = c(Q, x)$ (si veda, ad esempio, [6]). Si può verificare che l'eq. (8) è ancora integrabile sotto la condizione (13) e l'integrale vale

$$Q(x, \tau) = F(\tau) \tag{14}$$

dove τ è un tempo definito implicitamente dalla

$$t = \tau + \int_0^x \frac{dx}{c\{F(\tau), x\}} \tag{15}$$

ottenuta integrando l'equazione delle caratteristiche.

Anche nella scala di deflusso (12) si potrebbe introdurre una dipendenza del termine $Q(\Omega)$ da x, senza con questo modificare l'equazione derivata (10). In tal caso però la dipendenza esplicita di c da x, oltre che da Q, renderebbe impossibile l'integrazione in forma chiusa.

3. Nel 1956 [7] avevo mostrato la possibilità, nel campo delle onde di piena, di ridurre l'equazione di *de Saint-Venant* ad una equazione del tipo

$$\Omega = \Omega(Q) - \eta \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{16}$$

con η praticamente costante. Tale relazione, unita all'equazione di continuità, conduce ad un'equazione differenziale analoga all'eq. (10) del modello «parabolico», che allora non conoscevo pur essendo stato proposto da Hayami qualche anno prima, nel 1951 (cfr. [4]).

In questa Nota, riportato schematicamente il procedimento deduttivo dell'eq. (16), si vuole mettere in evidenza le differenze che tale modello presenta rispetto a quello « parabolico » di Hayami, differenze che, nonostante le analogie formali, incidono sensibilmente sui risultati.

4. In primo luogo chiariamo sulla base di quale ipotesi è lecito sostituire il sistema iperbolico, caratterizzato da un doppio valore della celerità, con una forma parabolica che consente una sola determinazione della celerità. Si è già detto che tale trasformazione è orientata allo studio di un particolare settore di fenomeni propagatori, quello delle onde di piena. Esse sono caratterizzate, oltre che da variazioni della sezione e della portata molto lente nel tempo e molto graduali nello spazio, anche e soprattutto da una sottintesa *condizione di regime* per cui tali grandezze si propagano con la *stessa celerità*, nel verso della corrente, con una forma che dipende solo da monte, senza possibilità di influenze da valle. Infatti la relativa condizione al contorno, per $x \to \infty$, è soltanto la limitazione di Q, mentre la situazione nella sezione $x = 0$ definisce la forma della $Q(0, t)$, oppure della $\Omega(0, t)$, restando imposta dalla condizione di regime l'associazione di una grandezza all'altra.

5. L'equazione di *de Saint-Venant*, nelle variabili Q ed Ω, assume la forma

$$i_f - j = \left(\frac{1}{B} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{g\Omega^2}\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{17}$$

Date le ipotesi di estrema gradualità delle variazioni di Q ed Ω, e di propagazione caratterizzata dalla celerità c, unica per entrambe le grandezze,

$$c = \frac{dQ}{d\Omega} = c(Q, x), \tag{18}$$

si può assumere la $\Omega = \Omega(Q, x)$, che annullerebbe il primo membro della (17) in regime di moto uniforme, come soluzione di prima approssimazione, e ritenere piccolo del primo ordine lo scostamento dalla soluzione effettiva. Allora, a meno di termini piccoli del secondo ordine, per la (18), risulta

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Dato che $\partial Q/\partial x = -\partial\Omega/\partial t$ per l'equazione di continuità, tutte le derivate presenti nell'eq. (17) possono essere sostituite in funzione di $\partial Q/\partial t$. Complessivamente l'eq. (17) si trasforma quindi nella relazione già riportata, che ora riscriviamo mettendo in evidenza l'eventuale dipendenza esplicita della scala di deflusso da x:

$$\Omega = \Omega(Q, x) - \eta\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{19}$$

Sulla base dell'eq. (3), posto $j = i_f$ ed impiegando le ordinarie formule idrauliche di resistenza, si verifica che la funzione $\Omega = \Omega(Q)$ si può porre nella forma

$$\Omega(Q) = KQ^n \tag{20}$$

dove, affinché in una data sezione il coefficiente K si possa ritenere invariante, l'esponente n deve avere valori intorno a $2/3$. In pratica le situazioni limite sono: $n \to 3/5$ per rapporti $Y/B \to 0$ (sezioni infinitamente larghe) ed $n \to 3/4$ per $Y/B \to 1$.

Conseguentemente si ottiene, con buona approssimazione la seguente espressione per il coefficiente η

$$\eta = \frac{n^3}{2\,g i_f}\cdot\frac{1}{\Psi}\left\{1 - \Psi\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2\right\} \tag{21}$$

nella quale si è indicato con Ψ il fattore adimensionale $Q^2 B/g\Omega^3$ che, ai fini del calcolo della (21), si può valutare con la

$$\Psi = \frac{Q^2 B}{g\Omega^3} \cong \frac{1}{gK^3} Q^{2-3n} B. \tag{22}$$

Questa equazione mostra che la Ψ, e quindi anche il coefficiente η, dipendono molto debolmente da Q. Se $n = 2/3$ e l'alveo è rettangolare, la dipendenza è addirittura nulla [2].

Indicando con

$$i_c = \frac{1}{C^2} \frac{P}{B} \tag{23}$$

la pendenza critica dell'alveo per assegnata profondità, e con

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g\Omega/B}} = \frac{Q}{\Omega \sqrt{g\Omega/B}} \tag{24}$$

il n^0 di Froude della corrente, la Ψ si può anche esprimere nelle forme

$$\Psi = \frac{i_f}{i_c} = F_r^2 . \tag{25}$$

Si osserva allora che nella (21) il termine

$$\Psi \left(\frac{1}{n} - 1\right)^2 = \frac{i_f}{i_c} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^2 = F_r^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right)^2 \tag{26}$$

è trascurabile rispetto ad 1 quando l'alveo ha debole pendenza (alveo fluviale con $i_f \ll i_c$) oppure, corrispondentemente, quando nella corrente quasi-uniforme è $F_r^2 \ll 1$. In tali condizioni sono trascurabili i corrispondenti termini dell'equazione di de Saint-Venant, che risultano essere proprio i termini inerziali. Resta così confermata la limitazione di applicabilità del modello di Hayami ad alvei fiuviali con dolce pendenza.

6. Lo studio della propagazione di un'onda di piena, sia in alveo fluviale, sia in alveo torrentizio, può essere condotto associando all'equazione di continuità un'equazione dinamica nella forma (19). Eliminando Ω fra le due equazioni si ottiene

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial Q}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \tag{27}$$

con

$$b = \frac{Q^{1-n}}{Kn} \tag{28}$$

uguale all'inverso della celerità c prima definita, ed η dato dalla (21).

(2) Per valutare la portata al passaggio di una piena in una sezione di un corso d'acqua dove è nota una scala di deflusso del regime permanente del tipo $Q = k\Omega^m$, si può utilizzare un'equazione analoga alla (19) ma esplicita in Q, anziché in Ω. Si ottiene, seguendo lo stesso procedimento, la relazione

$$Q = k\Omega^m + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

con $\zeta = \dfrac{\Omega}{2\, i_f\, mB} \{1 - \Psi (m - 1)^2\}$.

Il coefficiente k e l'esponente m sono correlati, tramite le

$$k = K^{-1/n} \quad , \quad m = \frac{1}{n} ,$$

ai corrispondenti valori K ed n dell'eq. (20).

Anche escludendo, per ora, una dipendenza esplicita di b da x, si nota che l'eq. (27) presenta, rispetto all'eq. (10), due differenze significative: (I) la sua validità non è limitata agli alvei a dolce pendenza, ma essa può sostituire il sistema iperbolico delle eq.ni (1)-(2) in tutti gli studi di propagazione delle onde, purché il moto si realizzi nelle condizioni di regime prima definito; (II) il coefficiente η dipende molto debolmente da Q, mentre il corrispondente coefficiente ν, dato dalla (11) dipende quasi linearmente da Q; l'approssimazione $\eta = \text{cost}$ appare dunque decisamente più attendibile della $\nu = \text{cost}$.

7. Se le variazioni dell'alveo, rispetto alla forma cilindrica, non sono trascurabili, la legge $\Omega = KQ^n$ dipende dalla coordinata x; generalmente si può assumere n invariante e $K = K(x)$. Di conseguenza, come mostra l'eq. (28), anche $b = b(Q, x)$.

In tal caso l'integrazione si può eseguire per differenze finite, operando con i procedimenti consueti, sul sistema equivalente alla (27) formato dall'equazione delle curve caratteristiche

$$\frac{dt}{dx} = b(Q, x) \tag{29}$$

e dall'equazione di compatibilità

$$\frac{dQ}{dx} = \eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \tag{30}$$

che vale su di esse.

Da notare che, per

$$\frac{i_f}{i_c} = F_r^2 > \frac{1}{(1/n - 1)^2} \cong 4, \tag{31}$$

il coefficiente η diventa negativo e quindi l'onda tende ad esaltarsi; si conferma così la condizione di instabilità dell'onda prevista per altra via (cfr. ad esempio [8]).

Nel caso invece che il tratto di alveo considerato sia abbastanza regolare da poter assumere $K = \text{cost}$, almeno mediamente, e quindi $b = b(Q)$, l'integrazione dell'eq. (27) può essere condotta in forma chiusa, trasformandola prima nell'equazione di Burger

$$\frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}. \tag{32}$$

Ciò si ottiene derivando la (28) rispetto a x e rispetto a t, sotituendo i risultati nella (27) e trascurando $\eta (d^2 b/dQ^2)(\partial Q/\partial t)^2$ che è piccolo di ordine superiore rispetto a $\eta (\partial^2 b/\partial t^2)$.

Operando la trasformazione non lineare proposta da Cole e Hopf (loc. cit. [8])

$$b = -2\eta \frac{\partial}{\partial t} (\ln \Phi), \tag{33}$$

l'equazione (32) viene ridotta ad un'equazione del *tipo calore* nella nuova funzione Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \tag{34}$$

con evidente scambio delle variabili indipendenti rispetto alla forma tipica.

La classica soluzione del problema ai valori iniziali della propagazione del calore si trasforma, in questo caso, nel calcolo della funzione $\Phi(x, t)$, e quindi della $b(x, t)$, sotto la condizione

$$b(0, t) = f(t)^{(3)} \qquad \forall t \geq 0 \tag{35}$$

che deriva subito, attraverso la (28), da quella assegnata per la portata Q (cfr. eq. 12). La soluzione è data dalla

$$b(x, t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-\tau}{x} e^{-(G/2\eta)} \, d\tau}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(G/2\eta)} \, d\tau}, \tag{36}$$

essendo $G(\tau; x, t)$ la funzione definita dalla

$$G(\tau; x, t) = \int_0^{\tau} f(\tau') \, d\tau' + \frac{(t-\tau)^2}{2x}. \tag{37}$$

Naturalmente, nota la $b = b(x, t)$ si ottiene dalla (28)

$$Q(x, t) = (Knb)^{1/(1-n)} \tag{38}$$

ed eventualmente $\Omega(x, t)$ dalla eq. (19).

Dato il cambiamento di variabile indipendente nella derivata seconda passando dall'eq. (27) all'eq. (10) di Hayami, l'applicazione dello stesso procedimento all'eq. (10) richiederebbe la conoscenza della condizione iniziale $Q(x, 0) = F(x)$, per $x > 0$, conoscenza che difficilmente è consentita nei problemi tecnici di propagazione delle onde di piena.

(3) La corrispondente condizione su Φ è

$$\Phi(0, t) = e^{-(1/2\eta)\int_0^{\tau} f(t')\,dt'} \qquad \forall t \geq 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. DE SAINT VENANT (1871) - «Compte Rendu de l'Ac. des Sciences». Paris, 73, n. 3, 147-154, n. 4, 237-240.
[2] F.M. HENDERSON (1971) - *Open Channel Flow.* The MacMillan Co. Chap. 9.
[3] M. GALLATI e U. MAIONE (1977) - *Mathematical Models for Surface Water Hydrology.* J. Wiley and Sons, 169-179.
[4] S. HAYAMI (1951) - « Bull. No. 1 ». Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Japan, Dec.
[5] L. NATALE e E. TODINI (1977) - *Mathematical Models for Surface Water Hydrology.* J. Wiley and Sons, 109-147.
[6] G. SUPINO (1965) - *Le reti idrauliche.* Pàtron, Cap. V.
[7] E. MARCHI (1956) - *L'Energia Elettrica,* n. 8, 783-791.
[8] G. B. WHITHAM (1974) - *Linear and Nonlinear Waves.* J. Wiley and Sons. Cap. 2, 3, 4.