

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

GIOVANNI COCCHI

**Onde irrotazionali al limite del frangimento**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.6, p. 586–593.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1978\\_8\\_64\\_6\\_586\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_6_586_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Meccanica dei fluidi.** — *Onde irrotazionali al limite del frangimento.* Nota II di GIOVANNI COCCHI, presentata (\*) dal Socio G. SUPINO.

RÉSUMÉ. — On fait suite à la Note I, avec l'exécution des calculs numériques.

8. Nella precedente Nota I (dalla quale prosegue la numerazione dei paragrafi e delle formule) ho dato il potenziale complesso di un moto soddisfacente alle condizioni poste, compresa la condizione al pelo libero nell'intorno dei punti angolosi. Il potenziale contiene i parametri indeterminati  $a_1, c_1, c_2, \dots, c_m$ , ai quali, come espongo qui di seguito, possono essere assegnati valori tali da soddisfare la condizione di pressione costante sulla superficie libera con approssimazione grande quanto si vuole, rimanendo verificate tutte le altre condizioni richieste.

La velocità complessa nel piano  $z_5$  è uguale alla velocità complessa (3) nel piano  $z_1$ , divisa per il prodotto delle derivate dalle funzioni di trasformazione (4), (5), (7), (8): derivate che, posto  $\mu = 2/3$ , valgono rispettivamente

$$(2/3) z^{-1/3} \quad ; \quad 3/2 (z+1)^{1/2} \quad ; \quad i \frac{2 a_3}{z_3^2 - a_3^2} \quad ; \quad 1 + \sum_{k=1}^m c_k k e^{-ikz} .$$

Il modulo della velocità reale è uguale al modulo della velocità complessa, quindi basta dividere il modulo della (3), la quale, tenuto conto di (13), (14) diventa

$$\frac{df}{dz} = \frac{ig^{1/2}}{(3/2) 2 \pi g} \left[ \frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_1/(a_1 - 1)} \right],$$

per il prodotto dei moduli delle derivate sopra indicate, dove  $z_2, z_3, z_4$  corrispondono a  $z_1$  secondo le rispettive funzioni di trasformazione (4), (5), (7), per ottenere la velocità  $V$ .

Poichè alla circonferenza del cerchio  $c_1$  (nel piano  $z_1$ ) corrisponde la linea del pelo libero nel piano  $z_5$ , fissato un punto  $z_1$  della circonferenza, si può ricavare nel modo suddetto la velocità  $V$  nel corrispondente punto del pelo libero. Per lo stesso  $z_1$ , si calcola con le (4), (6), (7), (8) il corrispondente  $z_5$ , la cui parte immaginaria rappresenta l'ordinata del punto. Il valore assoluto di questa ordinata è la profondità  $h$  del punto di pelo libero sotto l'orizzontale passante per i punti angolosi: possiamo quindi calcolare  $\sqrt{2gh}$  che, per soddisfare la (1), dovrebbe uguagliare  $V$ .

(\*) Nella seduta del 13 maggio 1978.

Ho verificato, come ho già detto, che, ponendo  $a_1 = 0,7$ ;  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ ; la condizione (I) è soddisfatta in tutto il pelo libero con approssimazione del 2%. Assumo questo campo come soluzione di prima approssimazione, apportando alla quale la piccola correzione rappresentata dalla trasformazione (8) si ottiene un'approssimazione grande quanto si vuole.

Per questo, fisso il numero  $m$  di termini della sommatoria in (8) da  $k = 1$  in poi; l'approssimazione sarà tanto più grande quanto maggiore è  $m$ . Lasciando indeterminati  $c_1, \dots, c_m$ , col procedimento sopra indicato esprimo  $V$  e  $\sqrt{2gh}$  in  $m$  punti della linea di pelo libero di una semionda. Uguagliando per ciascun punto queste espressioni di  $V$  e  $\sqrt{2gh}$ , ottengo  $m$  equazioni che consentono di determinare i valori di  $c_1, \dots, c_m$  con i quali la condizione (I) è verificata negli  $m$  punti prescelti.

Per risolvere queste equazioni, conviene linearizzarle nel modo seguente.

Poichè i parametri  $c_1, \dots, c_m$  rappresentano delle piccole correzioni, ammetto in un primo momento che gli errori rappresentati dalle differenze  $\Delta = \sqrt{2gh} - V$  siano funzioni lineari dei parametri stessi. A questo punto potrei anche adottare per la loro determinazione un procedimento di sviluppo in serie di Fourier, ma, disponendo delle possibilità offerte dal calcolo automatico, ho preferito la via già indicata di annullare le differenze  $\Delta$  in  $m$  punti prescelti del pelo libero di una semionda.

Fisso questi  $m$  punti, corrispondenti a punti situati sulla circonferenza  $c_1$  nella metà soprastante l'asse  $x_1$ , e li numero con l'indice  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Vedremo in seguito il criterio per la scelta di questi punti.

Posto all'inizio  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ , calcolo per ciascuno degli  $m$  punti la differenza  $\Delta_j$ .

Do un piccolo incremento  $\varepsilon_k$  a  $c_k$ , e calcolo i corrispondenti incrementi  $\delta_k(\Delta_j)$  che subiscono le  $\Delta_j$ ; suppongo in prima approssimazione che questi incrementi siano proporzionali a  $\varepsilon_k$ . Stabilisco allora il sistema di equazioni lineari nelle incognite  $c_k$ :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\delta_k(\Delta_j)}{\varepsilon_k} c_k = -\Delta_j; \quad \begin{matrix} (k = 1, \dots, m), \\ (j = 1, \dots, m), \end{matrix}$$

da cui ricavo i valori di prima approssimazione dei  $c_k$ .

In questi valori permangono dei piccoli errori dipendenti dagli scostamenti dalla linearità, e quindi, con questi  $c_k$  risultano delle differenze  $\Delta_j$  non ancora nulle. Partendo dai  $c_k$  trovati, si ripete allora il procedimento, che converge molto rapidamente.

Annullate, con l'approssimazione voluta, le differenze  $\Delta_j$ , è possibile determinare le differenze  $\Delta$  che si verificano nei punti intermedi fra quelli di indice  $j$ .

Passiamo ai criteri per la scelta dei punti in cui imporre l'annullamento delle  $\Delta_j$ . Se questi punti vengono disposti in modo che ne risulti la divisione in parti uguali, sull'asse  $x$ , del tratto corrispondente a una semionda, si verifica

che le differenze  $\Delta$  massime nei tratti intermedi vanno crescendo verso l'estremità della semionda col punto angoloso. Per perfezionare numericamente la soluzione, conviene addensare i punti verso questa estremità, in modo da ottenere la condizione che le  $\Delta$  massime nei tratti intermedi siano in valore assoluto tutte uguali. Anche questo problema si può linearizzare supponendo che gli incrementi di queste  $\Delta$  massime siano funzioni lineari degli spostamenti dati ai punti in cui le  $\Delta$  si annullano.

9. Noti i parametri delle trasformazioni, si possono agevolmente ricavare tutti gli elementi che interessano.

Si trovano le coordinate di quanti punti si vogliono del pelo libero e si calcola in essi la velocità; si può determinare la differenza fra questa e  $\sqrt{2gh}$  in punti intermedi a quelli in cui tale differenza si annulla, e quindi la approssimazione ottenuta nel soddisfacimento della condizione (1) al pelo libero.

La velocità di propagazione, uguale e contraria alla velocità della corrente all'infinito, vale (per onda di lunghezza  $2\pi$ ), ricordando anche (14):

$$(15) \quad c = \frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{g^{1/2}}{3\pi q}.$$

Questo valore potrebbe ricavarsi agevolmente da considerazioni sulla schiera di vortici, di passo  $2\pi$ , in cui la trasformazione (7) trasforma il vortice  $-\Gamma$  posto nel piano  $z_1$  nel punto  $A'_1$ , ma lo verificherò fra breve studiando la funzione di corrente all'infinito.

Dalle linee di corrente nel piano  $z_1$  entro il cerchio  $c_1$ , che sono anch'esse cerchi, si può passare al tracciamento delle linee di corrente nel piano  $z_5$ : si può determinare la velocità lungo le linee di corrente e risalire alla velocità di trasporto.

Sovrapponendo alle velocità nell'onda resa stazionaria la velocità di propagazione cambiata di segno, si ottengono le velocità delle particelle nella onda progressiva; da queste si può risalire al tracciamento delle traiettorie delle particelle.

Con procedimento che espongo qui di seguito, si può calcolare la portata globale di trasporto nell'onda progressiva avente, a profondità infinita, velocità nulla.

Il procedimento è basato sulla nota proprietà che la differenza fra i valori della funzione di corrente in due linee di corrente rappresenta il flusso della velocità, ossia la portata in volume fra le due linee. Considero la funzione di corrente  $\psi$  nel piano  $z_5 = x + iy$  dell'onda, con velocità  $c$  a profondità infinita. Nella linea di pelo libero,  $\psi$  ha lo stesso valore della funzione di corrente relativa al potenziale complesso (2) sulla circonferenza  $c_1$ . Tendendo all'infinito la profondità,  $\psi$  tende ad una funzione lineare di  $y$  che deve essere determinata. Se ora sovrappongo una velocità uniforme orizzontale  $c$ , la velocità a profondità infinita tende a zero. A questa corrente uniforme si assegna una funzione di corrente  $\psi'$ , funzione lineare di  $y$ , uguale e di segno contrario

a quella a cui tende  $\psi$  a profondità infinita. La differenza fra il valore di  $\psi$  sulla superficie libera dell'onda e il valore di  $-\psi'$  sulla retta orizzontale di compenso alla profondità  $h_m$  sotto i punti angolosi rappresenta la portata globale di trasporto nel senso della propagazione delle onde.

Con facili calcoli, che ometto per esigenze di brevità, si ottengono i seguenti risultati.

Funzione lineare  $\psi$  a cui tende la funzione di corrente nel piano  $z_3 = x + iy$  dell'onda quando la profondità tende a infinito (ossia  $y \rightarrow -\infty$ )

$$(16) \quad \psi = \frac{\sqrt{g}}{3 \pi q} \left[ -y + c_0 + \log \frac{(a_1^{2/3} + 1)^{1/2}}{2 a_1^{1/3} a_3} \left( a_1 - \frac{a_1}{a_1 - 1} \right) \right].$$

Come si vede, quando la profondità tende all'infinito, il moto tende ad una corrente uniforme di velocità

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\sqrt{g}}{3 \pi q},$$

a conferma della (15).

Per calcolare la portata di trasporto col procedimento sopra indicato, determino la differenza fra il valore della funzione di corrente  $\psi_0$  sul pelo libero, che ottengo da (2), (15) ponendo  $z_1 = 0$ :

$$(17) \quad \psi_0 = -\frac{\sqrt{g}}{3 \pi q} \log (1 - a_1),$$

e il valore  $\psi_m$  che una corrente uniforme, avente come funzione di corrente la  $\psi$  della (16) con segno cambiato, assume per  $y = -h_m$ , ossia sulla retta di compenso.

10. Ho eseguito i calcoli numerici programmandoli per la maggior parte sul calcolatore dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna.

Come ho detto prima, ho adottato  $a_1 = 0,7$ . Essendo  $\mu = 2/3$ , risulta (6):

$$a_3 = 1,391593.$$

Dapprima ho assunto  $m = 6$  (v. form. 8). Con il procedimento indicato nel punto 8, ho ottenuto i seguenti valori per i coefficienti  $c_k$  ( $c_0$  risulta da (9)) e  $q$  (form. 11):

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,043569; & c_2 &= -0,028015; & c_3 &= -0,030246 \\ c_4 &= -0,010933; & c_5 &= -0,001028; & c_6 &= 0,003581 \\ c_0 &= 0,047662; & q &= 0,097139. \end{aligned}$$

Finora ho assunto come unità di lunghezza il raggio del cerchio  $c_1$ . La lunghezza d'onda risulta  $2\pi$ . Se considero un'onda di lunghezza  $\lambda$ , semplici considerazioni di similitudine portano alla conseguenza che tutte le lunghezze

vanno moltiplicate per  $\lambda/2\pi$ , e tutte le velocità per  $\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}$ . Con questa osservazione, risulta subito dalla (14) la velocità di propagazione:

$$c = \frac{1}{3\pi q} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = 1,0923 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Nella Tabella A ho riportato i valori delle coordinate e delle velocità in una successione di punti della superficie libera della metà di un'onda, nella situazione di profilo fisso rispetto all'osservatore. L'altezza dell'onda risulta uguale a  $0,14107\lambda$ .

Nel grafico di fig. 4 è rappresentato (diagramma a) l'errore  $\Delta = \sqrt{2gh} - V$  (diviso per  $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ ) in funzione dell'ascissa  $x/\lambda$ . Si vedono i punti in cui questo errore si annulla, e si nota che i valori massimi di questo errore risultano compresi fra  $\pm 0,0008 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ .

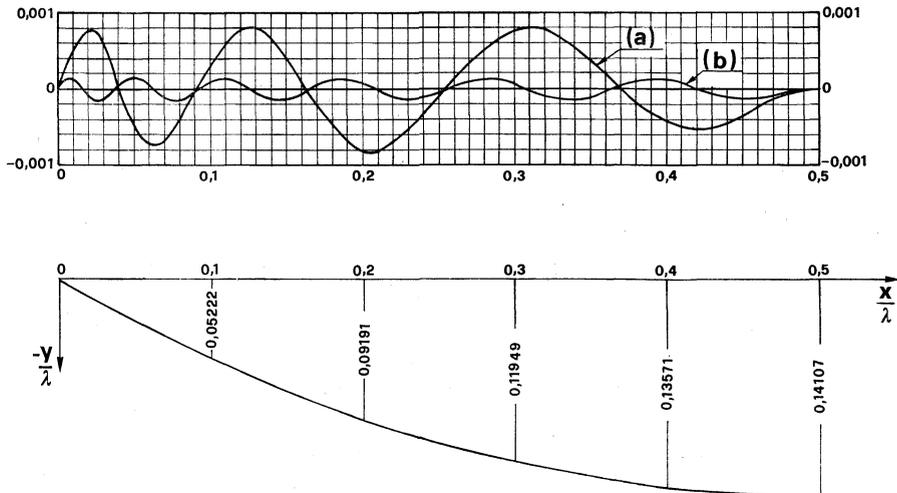


Fig. 4. - Errore nella velocità superficiale diviso per  $\sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Curva (a):  $m = 6$  - Curva (b):  $m = 12$ . Profilo dell'onda.

Successivamente, prendendo come base la soluzione così ottenuta, ho spinto l'approssimazione a un grado più elevato assumendo  $m = 12$ . Sempre con il procedimento indicato nel punto 8, ho ottenuto i seguenti valori per i coefficienti  $c_k$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,043543; & c_2 &= -0,027441; & c_3 &= -0,029338; \\ c_4 &= -0,011107; & c_5 &= -0,005793; & c_6 &= -0,002427; \\ c_7 &= -0,001693; & c_8 &= 0,002858; & c_9 &= 0,014341; \\ c_{10} &= 0,027564; & c_{11} &= 0,025354; & c_{12} &= 0,009340; \\ & & c_0 &= 0,047627; & & \\ & & q &= 0,097138. & & \end{aligned}$$

La velocità di propagazione risulta

$$c = 1,09229 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Nella Tabella B ho riportato i valori delle coordinate e delle velocità in una successione di punti della superficie libera della metà di un'onda, nella situazione di profilo fisso rispetto all'osservatore. L'altezza dell'onda risulta uguale a  $0,141067 \lambda$ .

TABELLA A

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,10	0,05222	0,8101	0,8098	0,0003
0,20	0,09194	1,0749	1,0757	0,0008
0,30	0,11945	1,2252	1,2244	0,0008
0,40	0,13572	1,3095	1,3063	-0,0004
0,50	0,14107	1,3315	1,3315	0,0000

TABELLA B

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,05	0,027622	0,58901	0,58916	0,00015
0,10	0,052217	0,80997	0,81005	0,00008
0,15	0,073633	0,96205	0,96193	-0,00012
0,20	0,091913	1,07465	1,07471	0,00006
0,25	0,107168	1,16053	1,16048	-0,00005
0,30	0,119493	1,22534	1,22540	0,00006
0,35	0,128987	1,27324	1,27315	-0,00009
0,40	0,135712	1,30579	1,30591	0,00012
0,45	0,139733	1,32524	1,32512	-0,00012
0,50	0,141067	1,33143	1,33143	0,00000

(1) Ascissa misurata sull'orizzontale passante per i punti angolosi, divisa per la lunghezza  $\lambda$  dell'onda.

(2) Profondità  $h$  sotto la suddetta orizzontale dei corrispondenti punti della superficie libera, divisa per  $\lambda$ .

(3) Corrispondenti valori di  $\sqrt{2gh}$ , divisi per  $\sqrt{g\lambda/2\pi}$ .

(4) Corrispondenti valori della velocità  $V$  nel pelo libero, ricavata dalla velocità complessa, divisi per  $\sqrt{g\lambda/2\pi}$ .

(5) Differenze fra i valori delle colonne (3) e (4).

Nel grafico di fig. 4 è rappresentato (diagramma b) l'errore  $\Delta = \sqrt{2gh} - V$  (diviso per  $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ ) in funzione dell'ascissa  $x/\lambda$ . Si vedono i punti in cui questo errore si annulla, e si nota che questa volta i valori massimi di questo errore risultano compresi fra  $\pm 0,00015 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ . Nella stessa fig. 4 è anche segnato il profilo di una semionda.

La retta orizzontale di compenso si trova alla profondità sotto i punti angolosi  $h_m = 0,094786 \lambda$ .

Con i dati riportati nella Tabella B è anche possibile calcolare il tempo impiegato da una particella liquida superficiale a percorrere una semionda. Dividendo la lunghezza di una semionda (si intende, in proiezione orizzontale) per questo tempo, abbiamo la velocità media orizzontale superficiale in condizione di profilo stazionario:

$$0,79274 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Sottraendo questa velocità dalla celerità di propagazione, si ottiene la velocità media di trasporto superficiale:

$$0,29946 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Componendo le velocità in superficie riportate nella Tabella B con la celerità di propagazione, si possono ottenere le velocità di una particella superficiale nella condizione di onda progressiva, e da queste la traiettoria, di una particella superficiale. Questa traiettoria, per onda di lunghezza unitaria, è disegnata nella fig. 5.

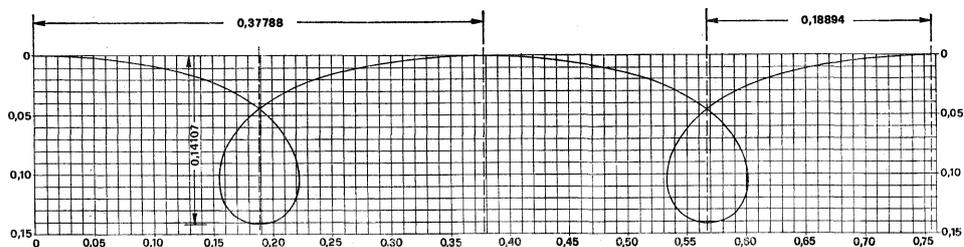


Fig. 5. - Traiettoria di una particella superficiale. Lunghezza d'onda  $\lambda = 1$ .

Nel modo detto nel punto 8, sarebbe possibile determinare linee di corrente e velocità a profondità qualsiasi, e quindi tracciare la traiettoria di una qualunque particella.

Col procedimento indicato nel punto 8, ho anche calcolato la portata globale di trasporto. Dalla (16), ponendo al posto di  $y$  l'ordinata dell'orizzontale

di compenso per onda lunga  $2\pi$ , uguale a  $-0,094784 \cdot 2\pi$ , si ottiene, per onda lunga  $2\pi$ ,

$$\psi = 1,24390 \sqrt{g}.$$

Dalla (17) si ottiene, sempre per onda lunga  $2\pi$ :

$$\psi_0 = 1,31509 \sqrt{g}.$$

Pertanto la portata globale di trasporto, per un'onda di lunghezza generica  $\lambda$ , risulta

$$0,07119 \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Ad esempio, a un'onda lunga 10 metri corrisponde una portata globale di trasporto di 0,4475 metri cubi al secondo per metro di larghezza.