Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Dinamica riemanniana di un sistema olonomo con struttura interna. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.6, p. 584–585.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_6_584_0>

Meccanica. — *Dinamica riemanniana di un sistema olonomo con struttura interna.* Nota II di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — Covariant formulations of the restricted problems, in the intrinsically conservative case (canonical type) are given for a holonomic material system with internal structure, scalar type.

Questa Nota II, che prosegue la numerazione dei paragrafi e delle formule della Nota I, riguarda il caso di un sistema *intrinsecamente conservativo.*

4. CASO INTRINSECAMENTE CONSERVATIVO: FORMULAZIONE HAMILTONIANA

Se localmente, per ogni linea (oraria) l di V_{n+1}, la legge di forza (13) soddisfa la condizione $q_0 \equiv K^\alpha V_\alpha = 0$, la $n+1$ forza K^α si dirà *motrice.* Si vuol dire che essa corrisponde ad un'azione di tipo meccanico, che ha soltanto l'effetto di accelerare la « particella », incurvando localmente la sua linea oraria (rispetto alla geodetica tangente), senza modificare la sua energia interna E_0. Tale è, ad esempio, un'azione del tipo della forza elettromagnetica di *Lorentz*: $K_\alpha = F_{\alpha\beta} P^\beta$, in cui $\mathbf{K}$ è costruito mediante un campo di *tensori doppi antisimmetrici* $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ del tipo (13).

Non si tratta ovviamente del caso generale, in cui K^α non sarà né perpendicolare, né tangente ad l. In ogni modo, K^α si dirà di tipo *posizionale* se dipende solo dal punto evento di $S : K^\alpha = K^\alpha(x)$; *conservativa* se esiste uno scalare $U_0(x)$, funzione regolare ed uniforme, tale che, per ogni punto del campo di definizione, e per ogni linea l, sia

$$q_0 \equiv \frac{dU_0}{d\tau} \sim K_\alpha V^\alpha \equiv \frac{\partial U_0}{\partial x^\alpha} V^\alpha \qquad \forall x^\alpha \quad \text{e} \quad V^\alpha ; \tag{28}$$

ciò che equivale alle $n+1$ identità

$$K_\alpha \equiv \partial_\alpha U_0 \qquad \left(\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, n\right). \tag{28'}$$

La funzione $U_0(x)$ prende naturalmente il nome di *potenziale intrinseco* del campo K^α; intrinseco dato il carattere assoluto della definizione (28).

(*) Nella seduta del 13 maggio 1978.

Nel caso conservativo, la formulazione (15) si traduce nel *sistema canonico*:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial P_\alpha} \quad , \quad \frac{dP_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n) \tag{29}$$

di funzione caratteristica H_0:

$$H_0 \equiv c\sqrt{g^{\alpha\beta}(x)\, P_\alpha P_\beta} - U_0(x) . \tag{30}$$

Non si tratta tuttavia *di un sistema hamiltoniano di tipo normale*. Si ha infatti $\det \| \partial_{\alpha\beta} H_0 \| = 0$ (6), e pertanto *esso non è equivalente ad un sistema lagrangiano* (7).

Inoltre, data l'indipendenza di H_0 da τ, vale l'*integrale primo dell'energia*:

$$H_0 \equiv E_0 - U_0 = \text{cost} , \tag{31}$$

come risulta direttamente dalla $(17)_1$, tenuto conto delle (28) e $(14)_2$. Di qui il principio variazionale di *Maupertuis–Halmilton*.

Per quanto infine riguarda la formulazione (19), essa si riassume ora nella (31), che vale ad esprimere E_0 in funzione del punto x^α, e nel sistema differenziale normale

$$\frac{D^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{E_0(x)} \left[c^2 g^{\alpha\beta}(x) - \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] \partial_\beta U_0(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n), \tag{32}$$

il quale va integrato con condizioni iniziali del tipo (20)–(21).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. FERRARESE (1963) – *Sulle equazioni di moto di un sistema soggetto a un vincolo anolonomo mobile*, « Rend. Matem. Roma », *22*, 351–370.

[2] C. CATTANEO (1963) – *Sulla struttura locale delle equazioni dinamiche di un sistema analonomo*, « Rend. Acc. Lincei », *34*, 396–402.

[3] C. CATTANEO (1959) – *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, « Ann. Matem. P. Appl. IV », *48*, 361–386.

[4] G. FERRARESE (1965) – *Proprietà di 2° ordine di un generico riferimento fisico in Relatività generale*, « Rend. Matem. Roma », *24*, 17–60.

[5] O. RODRIGUES (1840) – *Des lois géométriques qui regissent*... « J. Math. Pures et Appl. », V, 5, 380–440.

[6] J. L. SYNGE (1927) – *On the geometry of dynamics*, « Phil. Trans. 226, A ».

[7] C. AGOSTINELLI (1933) – *Sui sistemi di velocità e le famiglie naturali di linee in uno spazio curvo*, « Pont. Acad. Sci. Acta », *86*, 287–314.

[8] A. NADILE (1950–51) – *Forma sintetica delle equazioni di moto di un sistema analonomo*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *5*, 126–39.

[9] E. CLAUSER (1955) – *Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili*, « Rend. Acc. Lincei », *19*, 33–39.

[10] C. CATTANEO (1959) – *Moto di un fotone libero in un campo gravitazionale*, « Rend. Acc. Lincei », *27*, 54–59.

[11] G. FERRARESE (1974) – *Lezioni di Meccanica razionale*, Roma, Veschi.

(6) Del resto la $(15)_2$ non è risolubile rispetto alle P_α, in quanto funzione omogenea di grado zero di queste.

(7) Come in relatività ristretta (cfr. ad esempio [11], p. 561) l'aspetto lagrangiano compare nelle formulazioni relative, ma di esse non ci occuperemo in questa sede.