Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jean Ladeveze, Pierre Ladeveze

Majorations de la constante de Poincaré en élasticité

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.6, p. 548–556.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_6_548_0>

Analisi matematica. — *Majorations de la constante de Poincaré en élasticité.* Nota di JEAN LADEVÈZE e PIERRE LADEVÈZE, presentata (*) dal Socio straniero C. A. TRUESDELL.

RIASSUNTO. — Alcune maggiorazioni della costante di Poincaré in Elasticità sono ottenute per i domini convessi e fortemente stellati. Questa costante è l'inverso della frequenza fondamentale d'un corpo elastico (a coefficiente di Poisson nullo) il cui bordo è libero.

1. INTRODUCTION

Comme exemples d'application de majorations de la constante de Poincaré [1] en Elasticité, on peut citer l'inégalité de Toupin sur le Principe de St Venant [7], les estimations d'erreurs en Théorie des Poutres [3], la méthode d'estimation d'erreurs en Elements Finis [4].

La construction de majorations présente de plus grandes difficultés que dans le cas du problème de la membrane. Les résultats connus [1] sont très limités; on ne connaît pas de majoration générale même pour les domaines convexes.

Ce problème est résolu dans ce travail; des majorations sont construites pour les domaines convexes et fortement étoilés en fonction de caractéristiques géométriques élémentaires du domaine. La méthode est directe: elle n'utilise pas de majorations de la constante de Korn [5].

L'étape fondamentale est la majoration $(\hat{P}_1)$ établie pour les domaines convexes: $\hat{P}_1 = \Phi\,[0{,}101\,(\Phi^2 A/I)]^{1/2}$ où Φ est le diamètre du domaine, A son aire et I le plus petit moment central d'inertie. De ce résultat, est déduite la majoration $(\hat{P}_2)$ relative aux domaines fortement étoilés.

L'étude est présentée en dimension 2; les résultats se transposent aisément en dimension 3.

2. NOTATIONS. DEFINITIONS

$\mathscr{E}_2$ désigne l'espace affine euclidien orienté usuel à deux dimensions. E_2 est l'espace vectoriel associé. La transposition euclidienne est notée $\bar{\cdot}$; en particulier, le produit scalaire de deux vecteurs V et W de E_2 sera notée $\bar{V}W$. i_2 est l'opérateur de rotation de $(+\pi/2)$; ainsi, le produit vectoriel de V par W (dans E_2) s'écrit $\overline{i_2 V}W$.

(*) Nella seduta del 15 giugno 1978.

(1) Elle est égale à l'inverse de la fréquence fondamentale d'un corps élastique (de coefficient de Poisson nul) dont le bord est libre.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathscr{E}_2$ à frontière $\partial\Omega$ de classe C^0; M désigne le point courant. Nous supposons que Ω vérifie la propriété du segment, ce qui assure la densité de l'ensemble des fonctions, $C^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$. Ω' désigne un domaine inclus dans Ω ; $\partial\Omega'$ est sa frontière.

U désigne un champ défini sur Ω et à valeurs dans E_2, appartenant à $H^1(\Omega)$. On dira que U satisfait la condition $\hat{C}(\Omega')$ si:

$$\int_{\Omega'} U(M)\,\mathbf{dM} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega'} \overline{i_2\,OM}\,U(M)\,\mathbf{dM} = 0\,.$$

$H^1(\Omega\,;\hat{C}(\Omega'))$ désigne le sous-espace des champs de $H^1(\Omega)$ satisfaisant $\hat{C}(\Omega')$.

Il s'agit de champs de vecteurs à résultante et moments sur Ω' nuls. $D(U) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial M} + \overline{\frac{\partial U}{\partial M}}\right)$ est la déformation (linéarisée) associée à U.

La première valeur propre du problème de Neumann relatif à l'opérateur type de l'élasticité est:

$$\hat{\mu}_2[\hat{C}(\Omega')] = \inf_{U \in H^1(\Omega;\hat{C}(\Omega'))} \frac{\|D(U)\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|U\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

où

$$\|D(U)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tr\,[D(U)\,D(U)]\,\mathbf{dM}\,.$$

La constante de Poincaré relative à la condition $\hat{C}(\Omega')$ est: $1/\sqrt{\hat{\mu}_2[\hat{C}(\Omega')]}$.

Caractéristiques géométriques et notations

$$\|\cdot\|_{\mathscr{A}} : \text{ norme } L^2(\mathscr{A})\,.$$

Le domaine Ω est *fortement étoilé* si l'ensemble des points de Ω par rapport auxquels Ω est étoilé, n'est pas d'intérieur vide; l'intérieur de cet ensemble est le *domaine d'étotlement de* Ω et sera noté Ω^*.

On note:

A [resp. A^*, A'] = mes (Ω) [resp. Ω^*, Ω']

Φ [resp. Φ^*, Φ'] = diamètre (Ω) [resp. Ω^*, Ω']

L [resp. L^*, L'] = mes ($\partial\Omega$) [reps. $\partial\Omega^*$, $\partial\Omega'$] .

G [resp. G^*] est le centre d'inertie de Ω [resp. Ω^*]. I (G) [resp. $I^*(G^*)$] est l'opérateur central d'inertie de Ω [resp. Ω^*].

$$I(G) = \int_\Omega i_2\,GM\,\overline{i_2\,GM}\,\mathbf{dM}\,.$$

$I_1(G)$, $I_2(G)$ [resp. $I_1^*(G^*)$, $I_2^*(G^*)$] sont les moments principaux d'inertie de $I(G)$ [resp. $I^*(G^*)$].

On définit l'opérateur $J(G)$ par:

$$J(G) = \bar{i}_2 \, I(G) \, i_2 = Tr\,[I(G)] \cdot 1_{/E_2} - I(G) .$$

3. Resultat fondamental

Notre méthode est basée sur l'évaluation d'intégrales de la forme

$$\int_{\Omega\times\Omega'} [\overline{U(M) - U(M')}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM}' .$$

Pour les champs U *satisfaisant* $\hat{C}(\Omega)$,

$$U \to \left[\int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M) - U(M')}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM}' \right]^{1/2}$$

est une *norme équivalente à la norme* $L^2(\Omega)$.

Ce point remarquable est dû à l'identité suivante:

$$\int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M) - U(M')}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM}' =$$

$$= 2 \int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M)}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM}' + 2 \left[\int_{\Omega} \overline{U}(M)\, GM \, \mathbf{dM} \right]^2 +$$

$$+ 2\, Tr \left[\int_{\Omega} U(M)\, \overline{GM} \, \mathbf{dM} \, \overline{\int_{\Omega} U(M)\, \overline{GM} \, \mathbf{dM}} \right]$$

qui montre que:

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M) - U(M')}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM} \geq \\ \geq \displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} \overline{U}(M)\, MM'\, \overline{MM'}\, U(M) \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM} \geq \\ \geq \displaystyle\int_{\Omega} \overline{U}(M)\, J(G)\, U(M) \, \mathbf{dM} \geq \min\{I_1(G), I_2(G)\} \, \| U \|_{\Omega}^2 . \end{array} \right.$$

4. MAJORATION $(\hat{P}_1)$ POUR UN DOMAINE CONVEXE

Nous introduisons un système de coordonnées de $\Omega \times \Omega$ identique à celui utilisé dans [2].

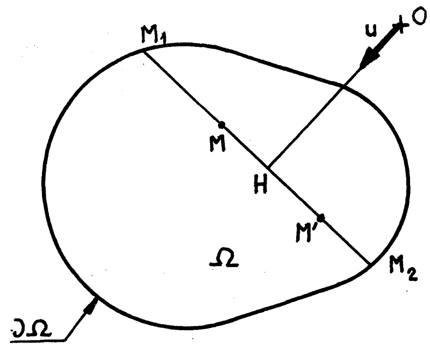

Fig. 1.

M et M′ désignent deux points courants de Ω. Soit O un point de $\mathscr{E}_2$ pris comme origine; H est la projection orthogonale de O sur la droite (M , M′).

Nous notons:

$$\omega_H = \{H \mid H \in \mathscr{E}_2 - \{o\} \,;\, H = \mathrm{Proj}_{(M,M')}(O)\,,\, M \in \Omega\,,\, M' \in \Omega\}\,.$$

L'intérieur de ω_H est désigné par Ω_H. Désormais H est un point arbitraire de Ω_H; posons $u(H) = OH/|OH|$.

M_1 et M_2 sont les points d'intersection de la frontière $\partial\Omega$ et de la droite $(H, i_2 u(H))$; on pose:

$$x_1(H) = \overline{HM}_1\, i_2\, u(H)$$

$$x_2(H) = \overline{HM}_2\, i_2\, u(H)\ [x_1(H) \leq x_2(H)]$$

$$\mathscr{I}(H) =]x_1(H)\,,\, x_2(H)[\,.$$

Avec ces notations, nous définissons le système de coordonnées suivant:

$$F : (H, x, x') \to (M, M') = (OH + x i_2 u(H)\,,\, OH + x' i_2 u(H))$$
$$\Sigma \to \Omega \times \Omega$$

où Σ est la variété:

$$\Sigma = \{(H, x, x') \mid H \in \Omega_H\,,\, x \in \mathscr{I}(H)\,,\, x' \in \mathscr{I}(H)\}\,.$$

En outre, $F(\Sigma)$ est égal à $\Omega \times \Omega$ à un ensemble de mesure nulle près.

Posant $\delta(H) = x_2(H) - x_1(H)$, nous notons:

$$\begin{cases} X = \dfrac{2}{\delta(H)}\left[x - \tfrac{1}{2}(x_1(H) + x_2(H))\right] \\ X' = \dfrac{2}{\delta(H)}\left[x' - \tfrac{1}{2}(x_1(H) + x_2(H))\right]. \end{cases}$$

Utilisant ce changement de variables, on obtient:

$$\int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M) - U(M')}\, MM']^2 \, \mathbf{dM}\, \mathbf{dM'} =$$

$$= \int_{\Omega_H} \frac{1}{|OH|} \mathbf{dH} \left(\frac{\delta(H)}{2}\right)^5 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\alpha(H, X) - \alpha(H, X')]^2 \, |X - X'|^3 \, dX\, dX'$$

où

$$\alpha(H, X) = \overline{U}(M)\, i_2 u(H).$$

Nous avons:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\alpha(H, X) - \alpha(H, X')]^2 \, |X - X'|^3 \, dX\, dX' =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} dX \int_{-1}^{X} dX' (X - X')^3 \int_{X'}^{X} F(\eta)\, d\eta \int_{X'}^{X} F(\tau)\, d\tau$$

où

$$F(\eta) = \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}(H, \eta) = \frac{\delta(H)}{2}\, \overline{i_2 u(H)}\, D(U)\, i_2 u(H).$$

En permutant l'ordre d'intégration dans cette dernière intégrale et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons la majoration:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\alpha(H, X) - \alpha(H, X')]^2 \, |X - X'|^3 \, dX\, dX' =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\eta)\, F(\tau)\, K(\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F^2(\eta)\, |\eta - \tau|\, d\eta\, d\tau \cdot \left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{K^2(\eta, \tau)}{G(\eta)\, G(\tau)}\, d\eta\, d\tau\right]^{1/2}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} &K(\eta\,,\tau) = \tfrac{1}{2}\,[2-(\eta^2+\tau^2)-|\eta-\tau|\,(1+\eta\tau)]\cdot \\ &\qquad\qquad\cdot[3+\eta\tau+(\eta-\tau)^2+|\eta-\tau|] \\ &G(\eta) = \int_{-1}^{1} |\eta-\tau|\,d\tau = 1+\eta^2\,. \end{aligned}\right.$$

Le calcul numérique donne:

$$\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{K^2(\eta\,,\tau)}{G(\eta)\,G(\tau)}\,d\eta\,d\tau\right]^{1/2} < 3{,}225\,.$$

Ainsi, on déduit que:

$$\int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M)-U(M')}\;MM']^2\,\mathbf{dM}\,\mathbf{dM}' \leq$$

$$\leq 3{,}225 \int_{\Omega_H} \frac{1}{|OH|}\,\mathbf{dH}\left(\frac{(\delta(H))}{2}\right)^4 \int_{\mathscr{I}(H)\times\mathscr{I}(H)} Tr\,[D^2(U)\,(H\,,x)]\,|x-x'|\,dx\,dx'.$$

Revenant aux coordonnées initiales, nous obtenons ($\delta(H) \leq \Phi$) :

$$(2)\qquad \int_{\Omega\times\Omega} [\overline{U(M)-U(M')}\;MM']^2\,\mathbf{dM}\,\mathbf{dM} \leq 3{,}225\,(\Phi/2)^4\,A\,\|D(U)\|_\Omega^2\,.$$

Des majorations (1) et (2), on déduit la majoration pour U *satisfaisant* $\hat{C}(\Omega)$:

$$(\hat{P}_1)\qquad \left|\begin{aligned} &\|U\|_\Omega \leq \hat{P}_1\,\|D(U)\|_\Omega \\ &\text{où} \\ &(\hat{P}_1)^2 = 0{,}101\,\frac{\Phi^4\,A}{\min\{I_1(G)\,,I_2(G)\}}\,. \end{aligned}\right.$$

Remarque importante: on a également pour U satisfaisant $\hat{C}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \overline{U}(M)\,[AGM\,\overline{GM} + J(G)]\,U(M)\,\mathbf{dM} \leq 0{,}101\,\Phi^4\,A\,\|D(U)\|_\Omega^2$$

estimation, qui pour certaines composantes de U donne un meilleur résultat que $(\hat{P}_1)$; en particulier, la composante suivant l'axe principal (en G) relatif au plus petit moment d'inertie.

Commentaires. Pour un rectangle de côtés a et b ($b \leq a$), on obtient:

$$(\hat{P}_1)^2 = 0,101 \times (12/ab^3)\,(a^2 + b^2)^2\,ab = 1,21\,(1 + (a^2/b^2))\,(a^2 + b^2)\,.$$

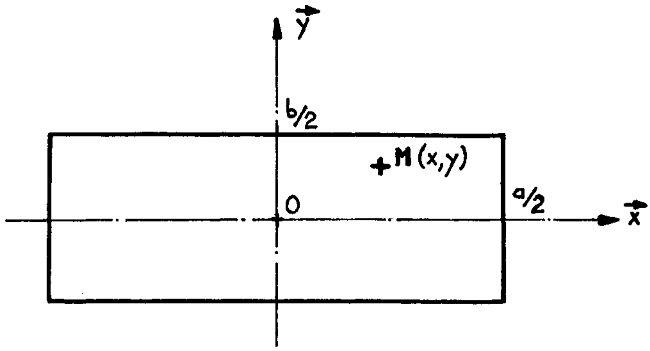

Fig. 2.

Le champ U défini par:

$$\mathrm{U}\,(\mathrm{M}) = -\,y v_{,x}\,(x)\,\vec{x} + v\,(x)\,\vec{y} \quad ; \quad v\,(x) = \cos\,(2\,\pi\,(x/a))$$

satisfait la condition $\hat{\mathrm{C}}\,(\Omega)$. Le calcul du rapport de Rayleigh pour ce champ donne:

$$\frac{1}{\hat{\mu}_2\,(\Omega)} > \frac{3}{4\,\pi^4}\,(a/b)^2\,[a^2 + (\pi^2/3)\,b^2]\,.$$

Cette minoration de la constante de Poincaré montre que la majoration $(\hat{P}_1)$ est très satisfaisante relativement à la dépendance par rapport qu domaine: pour $a/b \to \infty$, $1/a^2\,\hat{\mu}_2\,(\Omega)$ et $\hat{P}_1^2/a^2$ sont du même ordre $O\,(a^2/b^2)$.

5. Extension a des domaines plus generaux

5.1.: cas d'un domaine fortement étoilé (cf. § 2 pour la définition) Ω^* est le domaine d'étoilement de Ω, et Ω' l'intérieur de $\Omega - \Omega^*$. Le champ U satisfait $\hat{\mathrm{C}}\,(\Omega^*)$.

De l'identité:

$$\int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{\mathrm{U}\,(\mathrm{M}') - \mathrm{U}\,(\mathrm{M}^*)}\;\mathrm{M}'\,\mathrm{M}^*]^2\,\mathbf{dM'}\,\mathbf{dM^*} =$$

$$= \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{\mathrm{U}}\,(\mathrm{M}')\,\mathrm{M}'\,\mathrm{M}^*]^2\,\mathbf{dM'}\,\mathbf{dM^*} +$$

$$+ \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M^*)\, M^* M']^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} -$$

$$-2 \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M')\, M' M^*]\, [\overline{U}(M^*)\, M' M^*]\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*}$$

on déduit par l'inégalité de Cauchy–Schwarz:

$$\int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M')\, M' M^*]^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} \leq \tag{3}$$

$$\leq 2 \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{\overline{U}(M') - \overline{U}(M^*)}\, M' M^*]^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} +$$

$$+ 2 \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M^*)\, M^* M']^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*}\,.$$

Par la majoration ([2], (4)), on obtient:

$$\left| \begin{aligned} & 2 \int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{\overline{U}(M') - \overline{U}(M^*)}\, M' M^*]^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} \leq \\ & \qquad \leq 2\, \Phi^2 \int_{\Omega' \times \Omega^*} \left[\overline{\overline{U}(M') - \overline{U}(M^*)}\, \frac{M' M^*}{|M' M^*|}\right]^2 \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} \leq \\ & \qquad \leq \Phi^4 A^* E \,\| D(U) \|_\Omega^2 \\ & \text{où} \\ & E \doteq \inf \{1 + \log [(\sqrt{2} + 1)\, A/A^*]\,,\ 1 + \log [\Phi L^*/2\, A^*]\}\,. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

D'autre part:

$$\int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M^*)\, M^* M']^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} \leq \Phi^2 A' \,\| U \|_{\Omega^*}^2 \leq \Phi^2 A' \,\hat{P}_1^2(\Omega^*)\, \| D(U) \|_{\Omega^*}^2$$

et

$$\int_{\Omega' \times \Omega^*} [\overline{U}(M')\, M' M^*]^2\, \mathbf{dM'}\, \mathbf{dM^*} \geq \min \{I_1^*(G^*)\,,\ I_2^*(G^*)\}\, \| U \|_{\Omega'}^2\,.$$

Finalement, on obtient:

$$\| U \|_{\Omega'}^2 \leq \frac{1}{\min \{I_1^*(G^*)\,,\ I_2^*(G^*)\}}\, [\Phi^4 A^* E + 2\, \Phi^2 (A - A^*)\, \hat{P}_1^2(\Omega^*)]\, \| D(U) \|_\Omega^2\,.$$

Ainsi, on a la majoration pour U *satisfaisant* $\hat{C}(\Omega^*)$:

$$(\hat{P}_2) \quad \left| \begin{array}{l} \| U \|_\Omega \leq \left\{ \dfrac{1}{\min \{ I_1^*(G^*) , I_2^*(G^*) \}} \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot [\Phi^4 A^* E + 2 \Phi^2 (A - A^*) \hat{P}_1^2(\Omega^*)] + \hat{P}_1^2(\Omega^*) \right\}^{1/2} \| D(U) \|_\Omega \\ \text{où} \\ E = \inf \{ 1 + \log [\sqrt{2} + 1) A/A^*] , 1 + \log [\Phi L^*/2 A^*] \} . \end{array} \right.$$

5.2.: *Remarques*:

Pour des domaines plus généraux que des domaines fortement étoilés, on adaptera la technique développée dans [2] à propos du problème de la membrane. En outre, de ce travail [2], on peut déduire ici une majoration " optimale " du même type que ([2], P_2^*); cette majoration relative à la classe des domaines fortement étoilés, est exacte pour les domaines convexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. H. BRAMBLE et L. E. PAYNE (1962) – *Some Inequalities for vector functions with applications in Elasticity*, « Arch. Rat. Mech. Analysis », *11*, 16–26.

[2] J. LADEVÈZE et P. LADEVÈZE – *Majorations de la constante de Poincaré relative au problème de la membrane pour des domaines fortement étoilés* (à paraître).

[3] J. LADEVÈZE, P. LADEVÈZE, M. MANTION, F. PÉCASTAINGS et J. P. PELLE – *Fondements de la Théorie linéaire des poutres élastiques*. (Parties I et II à paraître dans « Journal de Mécanique »).

[4] P. LADEVÈZE – *New error estimates procedure in finite element methods and applications* (à paraître).

[5] P. LADEVÈZE – *Majorations de la constante de Korn* (à paraître).

[6] L. E. PAYNE (1967) – *Isoperimetric inequalities and their applications*, « SIAM Review », *9* (3), 453–488.

[7] R. A. TOUPIN (1965) – *Saint Venant's Principle*, « Arch. Rat. Mech. Analysis », *18*, 83–99.