
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIOVANNI COCCHI

Onde irrotazionali al limite del frangimento. Nota 1

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.5, p. 473–480.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_5_473_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei fluidi. — *Onde irrotazionali al limite del frangimento.* Nota I di GIOVANNI COCCHI, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

RESUMÉ. — On donne ici, au moyen de représentations conformes, une solution de la houle progressive superficielle irrotationnelle, qui résout directement le problème de la houle de grande hauteur, et, en particulier, de la houle au limite de déferlement, lorsque sur le profil de la surface libre paraissent des points anguleux.

La condition de pression constante sur la surface libre peut être satisfaite avec approximation aussi grande qu'on veut.

La solution donne, en termes finis, le potentiel complexe du mouvement, duquel on peut aisément obtenir tous les éléments qui intéressent: vitesse de propagation, forme du profil, vitesse et trajectoire des particules, débit de transport.

Les conclusions sont dans la Note II.

1. In liquido perfetto e senza capillarità, considero un'onda di oscillazione superficiale irrotazionale di tipo permanente al limite del frangimento, ossia nella condizione di altezza massima, quando nel profilo di pelo libero compaiono punti angolosi.

In questa Nota, assumo la profondità infinita. Ottengo la soluzione del problema di determinare gli elementi del moto mediante trasformazioni conformi che trasformano una circonferenza nel profilo dell'onda.

La condizione di pressione costante nel pelo libero viene soddisfatta con approssimazione grande quanto si vuole, che può essere spinta facilmente ad un grado elevato.

A differenza della nota trattazione di Levi Civita, si ottiene direttamente la soluzione per l'onda al limite di frangimento (potrebbe però ottenersi parimenti la soluzione per onde di qualsiasi altezza); inoltre la soluzione fornisce in termini finiti il potenziale complesso, da cui si possono agevolmente ricavare con grande precisione tutti gli elementi che interessano: altezza e forma dell'onda, velocità di propagazione, velocità e traiettorie delle particelle, velocità di trasporto, portata globale di trasporto, ecc.

Il procedimento può essere esteso al caso di profondità finita, e anche di moto rotazionale (almeno con rotore costante, in profondità finita). Mi propongo di trattare questi argomenti in memorie successive.

2. Ammesso che, nel campo di moto dell'onda progressiva, a profondità infinita la velocità sia nulla, e indicata con c la celerità di propagazione, sovrappongo in tutto il campo una velocità uniforme uguale e contraria a c .

Ottengo un moto stazionario con linea di superficie libera fissa, sotto la quale scorre una corrente che a profondità infinita tende ad essere uniforme con velocità c .

(*) Nella seduta del 13 maggio 1978.

Poichè nella superficie libera la pressione è costante, e la velocità nei punti angolosi è nulla, la velocità V in ogni punto della superficie deve essere

$$(1) \quad V = \sqrt{2gh},$$

avendo indicato con h la profondità del punto sotto l'orizzontale passante per i punti angolosi, e con g l'accelerazione di gravità.

Si tratta di trovare il potenziale complesso di un moto che abbia come linea di corrente una linea ondulata periodicamente (pelo libero) con punti angolosi nei colmi, che sia simmetrico rispetto agli assi verticali posti in corrispondenza dei punti angolosi nei colmi e delle mezzarie fra i colmi, che tenda all'infinito a una corrente uniforme e che sul pelo libero soddisfi alla condizione (1).

Con trasformazioni conformi trasformo la circonferenza di un cerchio in una linea ondulata periodica con punti angolosi nei colmi (ad ogni giro della circonferenza corrisponde un'onda), e il campo interno al cerchio nel campo infinito posto sotto un'onda della linea ondulata (dalla parte della concavità dei punti angolosi). Un opportuno campo di moto interno al cerchio, avente la circonferenza come linea di corrente, si trasforma in un moto che ha la linea ondulata come linea di corrente, che all'infinito tende ad una corrente uniforme e che soddisfa alle condizioni di simmetria suddette.

Nel potenziale complesso del moto entro il cerchio sono contenuti due parametri arbitrari: altri parametri arbitrari in numero grande a piacere sono contenuti nella funzione di trasformazione conforme.

A questi parametri si possono assegnare valori tali da soddisfare alla condizione (1) nell'intorno dei punti angolosi (si ritrova la nota condizione che l'angolo deve essere di 120°) e in tanti punti quanti si vogliono della superficie libera di una semionda. Negli altri punti della superficie libera la (1) è verificata con approssimazione tanto più grande quanto maggiore è il numero dei punti di coincidenza; gli scostamenti possono essere determinati con esattezza, in modo da stabilire l'approssimazione raggiunta.

Nel successivo punto 3 fornisco il potenziale complesso del moto entro il cerchio. Nei punti 4, 5, 6, espongo le trasformazioni conformi. Nei punti 7, 8, tratto la determinazione dei parametri per il soddisfacimento della condizione al pelo libero. Nel punto 9 ricavo gli elementi interessanti dell'onda. Infine nel punto 10 riporto i calcoli numerici.

3. Nel piano della variabile complessa z_1 , considero un cerchio di raggio 1, col centro nel punto 1 dell'asse reale, e quindi tangente all'asse immaginario nell'origine degli assi (fig. 1). D'ora in poi, le varie lunghezze considerate saranno espresse col rapporto col raggio di questo cerchio.

Come è noto, se nell'interno di un cerchio di raggio 1 è collocato un vortice di intensità Γ a distanza r dal centro, e all'esterno, sullo stesso raggio, è collocato un vortice di intensità $-\Gamma$ a distanza $1/r$ dal centro, la circonferenza del cerchio risulta linea di corrente.

Nel piano z_1 , in un punto A_1 , sull'asse reale con ascissa a_1 , colloco un vortice destrogiro di intensità Γ . Nel punto A'_1 dell'asse reale con ascissa $a_1/(a_1 - 1)$ colloco un vortice di intensità $-\Gamma$. Poiché i due vortici si trovano rispetto al cerchio nella situazione sopra detta, la circonferenza c_1 del cerchio risulta linea di corrente.

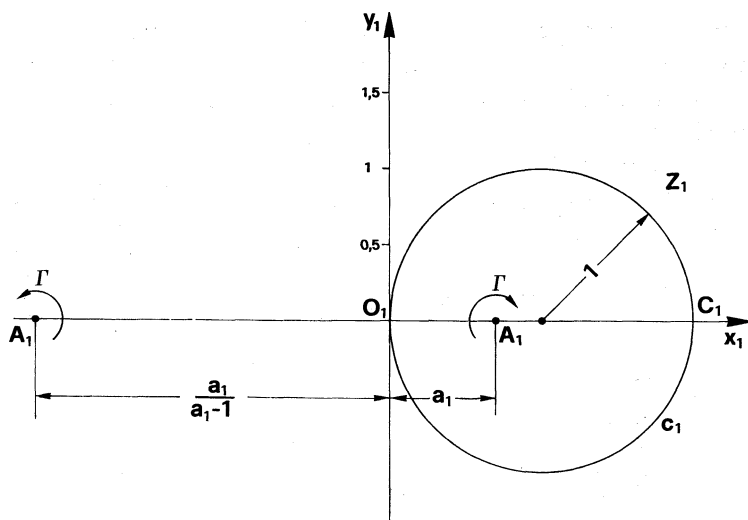


Fig. 1.

Il potenziale complesso è

$$(2) \quad f_1(z_1) = \frac{i\Gamma}{2\pi} [\log(z_1 - a_1) - \log(z_1 - a_1/(a_1 - 1))];$$

e la velocità complessa:

$$(3) \quad \frac{df_1(z_1)}{dz_1} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_1/(a_1 - 1)} \right].$$

4. Applico al piano z_1 la trasformazione conforme definita dalla funzione

$$(4) \quad z_2(z_1) = z_1^\mu,$$

con μ numero reale positivo da determinare.

Con la (4), ai due semiassi immaginari del piano z , corrispondono nel piano z_2 due semirette uscenti dall'origine di argomento $+\mu\pi/2$ e $-\mu\pi/2$; formanti quindi l'angolo $\mu\pi$ fra loro.

Questo angolo risulterà quello formato dalla linea di pelo libero delle onde nei punti angolosi: in base al noto risultato di Stokes, si può già prevedere che troveremo $\mu = 2/3$.

Successivamente applico al piano z_2 la trasformazione

$$(5) \quad z_3(z_2) = (z_2 + 1)^{1/\mu} - 1.$$

La (5) elimina la singolarità (punto critico) all'infinito introdotta dalla (4).

La circonferenza c_1 , che nel piano z_1 è tangente nell'origine all'asse immaginario, con le trasformazioni (4), (5) si trasforma nel piano z_3 in una curva chiusa c_3 , simmetrica rispetto all'asse reale, che presenta nell'origine un punto angoloso con angolo interno uguale a $\mu\pi$ (fig. 2). La figura è stata disegnata dando ad μ il valore $2/3$, e quindi all'angolo del punto angoloso il valore di 120° , come risulterà.

Entro la curva c_3 , le funzioni (4) e (5) sono olomorfe.

Al punto A_1 corrisponde nel piano z_3 il punto A_3 , sull'asse reale, di ascissa

$$(6) \quad a_3 = (a_1^\mu + 1)^{1/\mu} - 1.$$

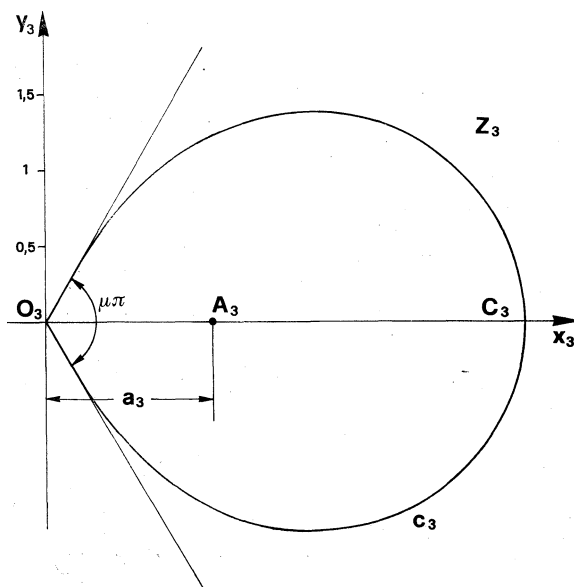


Fig. 2.

5. Applico ora al piano z_3 la trasformazione

$$(7) \quad z_4 = i \log \frac{z_3 - a_3}{z_3 + a_3}.$$

Con la (7), per effetto della polidromia del logaritmo, all'origine O_3 del piano z_3 corrispondono nel piano z_4 gli infiniti punti O_4 posti sull'asse reale alle ascisse $\pi + 2n\pi$, $-\pi - 2n\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$), in cui il campo subisce una rotazione $-\pi/2$ (fig. 3).

Al punto all'infinito $B_{3\infty}$ corrispondono i punti B_4 sull'asse reale posti nell'origine e alle ascisse $\pm 2n\pi$, in cui il campo subisce una rotazione $+\pi/2$.

Al punto A_3 corrisponde il punto all'infinito $A_{4\infty}$.

Al segmento O_3A_3 corrispondono le semirette parallele all'asse immaginario uscenti dai punti O_4 e dirette nel verso negativo dell'immaginario.

Alla semiretta posta sull'asse reale da A_3 verso l'infinito positivo $B_{3\infty}$, corrispondono le semirette parallele all'asse immaginario uscenti dai punti B_4 e dirette nel verso negativo dell'immaginario.

Alla curva c_3 corrisponde la curva con ondulazioni periodiche c_4 , che presenta nei punti O_4 dei punti angolosi con angolo uguale a $\mu\pi$.

Alla simmetria che nel piano z_3 si verifica rispetto all'asse reale, corrisponde nel piano z_4 la simmetria rispetto agli assi paralleli all'immaginario e passanti per i punti B_4, O_4 .

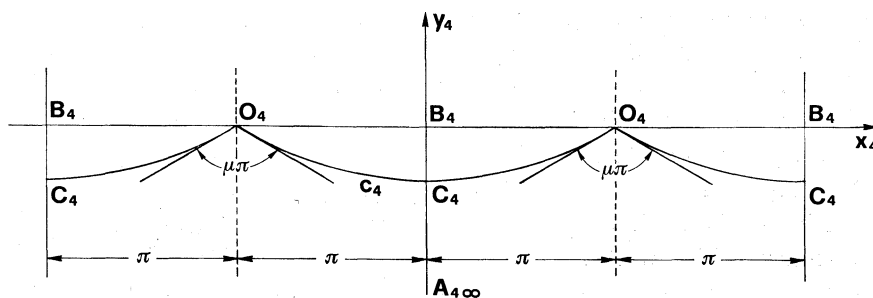


Fig. 3.

Il campo di moto (2) entro il cerchio c_1 col vortice incentrato nel punto A_1 si trasforma in una corrente diretta verso il lato reale positivo, nella quale la curva c_4 è linea di corrente.

Il punto A_3 , corrispondente al punto A_1 del piano z_1 , centro del vortice di intensità Γ , va all'infinito, dandosi luogo a un campo che all'infinito tende ad una corrente uniforme di velocità $\Gamma/2\pi$.

Si è così trovato un campo di moto irrotazionale che soddisfa a tutte le condizioni di periodicità e simmetria e alle condizioni all'infinito indicate nel punto (1).

Si potrà verificare che se, oltre ad assegnare al parametro μ il valore $2/3$, si assegna al parametro a_1 il valore $0,7$, la condizione (1) al pelo libero è soddisfatta approssimativamente con errore contenuto entro il 2 per cento.

Assumo questo campo di moto come soluzione di prima approssimazione, partendo dalla quale, con la trasformazione conforme indicata nel punto seguente, otterrò la soluzione definitiva, con cui la condizione (1) può essere soddisfatta in tutto il pelo libero con approssimazione grande quanto si vuole.

6. Applico al piano z_4 la trasformazione

$$(8) \quad z_5 = z_4 + i \sum_{k=0}^m c_k e^{-ikz_4},$$

dove $c_1, \dots, c_m$ sono costanti reali da determinare, e c_0 , se vogliamo che i punti angolosi non si spostino e quindi che per $z_4 = \pi \pm 2n\pi$ risulti $z_5 = z_4$, deve essere

$$(9) \quad c_0 = - \sum_{k=1}^m (-1)^k c_k.$$

La sommatoria a secondo membro di (8) si deve intendere come una piccola correzione sommata a z_4 .

Posto $z_4 = x_4 + iy_4$, il termine generico della sommatoria risulta

$$ic_k e^{-ikz_4} = ic_k e^{ky_4} e^{-ikx_4}.$$

Il suo modulo è funzione solo di y_4 ; vale c_k per $y_4 = 0$, e, essendo y_4 negativo, decresce rapidamente (quanto più grande è k) nel senso delle profondità crescenti, tendendo a zero per y_4 tendente a $-\infty$.

L'argomento è proporzionale a x_4 , e pertanto il termine è periodico rispetto a x_4 con periodo $2\pi/k$ (e quindi anche 2π); esso vale $\pm \pi/2$ per x_4 uguale a $0 \pm 2n\pi$ e a $\pi \pm 2n\pi$ (n intero).

Con la trasformazione (8), se fosse diverso da zero solamente c_k , l'asse x_4 si trasformerebbe in una cicloide accorciata (o trocoide) di periodo $2\pi/k$ (e quindi anche di periodo 2π). La cicloide è accorciata (ossia non ha punti doppi o regressi) se $c_k < 1/k$, condizione certamente soddisfatta perchè i c_k risulteranno molto piccoli.

La trasformazione (8), conservando le condizioni di periodicità e simmetria e le condizioni all'infinito del campo z_4 , introduce una correzione attraverso un numero a piacere m di parametri c_k , assegnando ai quali opportuni valori è possibile soddisfare alla condizione (1) al pelo libero, con approssimazione grande quanto si vuole, come si vedrà in seguito.

7. Esaminiamo ora le condizioni necessarie perchè la (1) sia soddisfatta al pelo libero nell'intorno dei punti angolosi dell'onda.

Il potenziale complesso (2) nel piano z_1 , nell'intorno del punto $z_1 = 0$, ossia per z_1 infinitesimo, sviluppando i logaritmi e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, diventa:

$$(10) \quad f_1(z_1) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{a_1 - 2}{a_1} z_1 + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(a_1 - 1).$$

Ponendo in (10) $z_2^{1/\mu}$ al posto di z_1 , secondo la (4), e moltiplicando poi z_2 per le derivate delle funzioni (5), (7), (8), calcolate nei punti corrispondenti a $z_1 = 0$, si ottiene il potenziale complesso nell'intorno dei punti angolosi del profilo nel piano z_5 ; e quindi il potenziale di velocità ϕ e la funzione di corrente ψ nello stesso intorno.

Indico con ρ (infinitesimo) e ϑ rispettivamente modulo e argomento di $z_5 - \pi$ nell'intorno del punto π , ossia di un punto angoloso del profilo c_5 , corrispondente nel piano z_5 al cerchio c_1 nel piano z_1 : ho pertanto così trasportato l'origine nel detto punto. Con facili calcoli, non tenendo conto della ininfluyente costante additiva, risulta

$$\varphi = \Gamma q \rho \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\vartheta}{\mu} \right),$$

$$\psi = -\Gamma q \rho \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\vartheta}{\mu} \right);$$

dove ho posto per brevità

$$(11) \quad q = \frac{1}{2\pi} \frac{2 - a_1}{a_1} \left[\frac{\mu a_3}{2} \right]^{1/\mu} \left[1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k k c_k \right]^{-1/\mu}.$$

Dall'espressione di ψ si ha la conferma che la linea di corrente parte dal punto angoloso con rami di argomento $-\pi(1-\mu)/2$; $-\pi(1+\mu)/2$; ossia formanti fra loro l'angolo $\mu\pi$, angolo che ha per bisettore il lato negativo dell'asse immaginario: infatti per tali valori di ϑ il seno a fattore nell'espressione di ψ è nullo, e pertanto ψ risulta costante (indipendente da ρ), indicando che si tratta di linea di corrente.

Per gli stessi valori di ϑ , il coseno a fattore di φ assume i valori -1 e $+1$, e quindi si ha

$$\varphi = \mp \Gamma q \rho^{1/\mu}.$$

La velocità lungo la linea di corrente (sempre nell'intorno del punto angoloso) è, in valore assoluto

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu} \Gamma q \rho^{1/\mu - 1}.$$

Poichè per soddisfare la (1) la velocità deve essere proporzionale a $\sqrt{\rho}$, ne risulta

$$(13) \quad \mu = 2/3.$$

Si ritrova quindi il noto risultato che l'angolo formato dai due rami del profilo d'onda nel punto angoloso vale $2\pi/3 = 120^\circ$. Ma il calcolo ora fatto ci serve anche per determinare la relazione fra l'intensità Γ del vortice e la accelerazione di gravità g . Posto l'asse reale orizzontale, i rami della linea di corrente profilo di pelo libero partono dal punto angoloso con angolo di 30° sotto l'orizzontale. Come profondità h sotto il punto angoloso nel suo intorno risulterà quindi

$$h = \rho \sin 30^\circ = \rho/2.$$

Pertanto la condizione (1) diventa, ponendo nella (12) $\mu = 2/3$:

$$(14) \quad \begin{aligned} (3/2) \Gamma g \rho^{1/2} &= \rho^{1/2} g^{1/2}; \\ \Gamma &= g^{1/2} / (3/2) g. \end{aligned}$$

Anche nell'espressione (11) di g va posto $\mu = 2/3$.

Ricordo che abbiamo stabilito l'unità di misura di lunghezza uguale al raggio del cerchio c_1 ; l'unità di misura del tempo è arbitraria.

Ho così ottenuto, con le formule (2), (4), (5), (7), (8), il potenziale complesso di un moto, avente come superficie libera una linea ondulata periodicamente con punti angolosi nei colmi, simmetrico rispetto agli assi verticali posti in corrispondenza dei punti angolosi nei colmi e delle mezzarie fra i colmi, tendente verso la profondità infinita ad una corrente uniforme. Le (13), (14) assicurano che sia soddisfatta la condizione (1) di pressione costante sulla superficie libera nell'intorno dei punti angolosi. Rimangono disponibili i parametri $\alpha_1, c_1, c_2, \dots, c_m$, i quali saranno determinati, come ho detto nel punto 1, in modo da soddisfare la (1) in quanti punti si vogliono della superficie libera.

Questo argomento sarà sviluppato nella parte successiva di questa memoria, nella quale svolgerò anche i calcoli numerici, ricavando le caratteristiche dell'onda.