ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Dinamica riemanniana di un sistema olonomo con struttura interna

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.5, p. 466–472.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_5_466_0>

Meccanica. — *Dinamica riemanniana di un sistema olonomo con struttura interna.* Nota I di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — Covariant formulations of the restricted problems, in the general case, are given for a holonomic material system with internal structure, scalar type.

In questa Nota viene ripreso un precedente studio [1] sui sistemi anolonomi con vincoli mobili (collegato direttamente a [2]), in vista di completare lo schema geometrico–dinamico mediante una struttura interna, di tipo scalare, compatibile con azioni termomeccaniche. Qui viene tuttavia considerato il solo approccio olonomo, limitatamente alle formulazioni tensoriali più generali, nei *problemi ristretti*, ovvero particolari, di tipo intrinsecamente conservativo (Nota II), le quali hanno carattere hamiltoniano come in Relatività ristretta.

Le formulazioni relative nel senso corrente [3] ovvero più generali (cfr. [4], § 2), nonchè l'approccio anolonomo e lo studio dello schema continuo corrispondente, saranno oggetto di una memoria in preparazione.

1. VARIETÀ DEGLI EVENTI ED EQUAZIONI DI MOTO

Sia S un *sistema olonomo* ad n gradi di libertà, riferito per semplicità a coordinate lagrangiane q^h $(h = 1, 2, \cdots, n)$ *globali* (1): $-\infty < q^h < +\infty$; $T \equiv T_2 + T_1 + T_0$ la sua *energia cinetica* che, introducendo la coordinata temporale $q^0 \equiv t$, si presenta come una *forma quadratica definita positiva nelle* $\dot{q}^\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, \cdots, n)$ (2):

$$T = \tfrac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta > 0\,. \tag{1}$$

Ai fini della geometrizzazione dei possibili movimenti di S, più che lo spazio delle configurazioni istantanee, come si fa usualmente (cfr. ad esempio [6], [7], [8], [9]) dietro suggerimento del caso di vincoli indipendenti dal tempo, conviene introdurre la *varietà degli eventi di* S. Si vuol dire la varietà riemanniana V_{n+1} la cui metrica $g_{\alpha\beta}(q)$ $(\alpha, \beta, = 0, 1, 2, \cdots, n)$ relativa alle coordinate spazio–temporali q^α coincide, a meno di una *costante dimensionale*

(*) Nella seduta del 13 maggio 1978.

(1) Per un sistema rigido libero, ad esempio, sono tali le coordinate del baricentro e i parametri di *Rodrigues* [5] di una terna solidale rispetto ad una terna fissa.

(2) Se, come si ammette, i vincoli dipendono dal tempo in *modo intrinseco,* le coordinate q^α sono *tutte essenziali* ai fini della descrizione geometrica di S nel riferimento sottinteso; cioè risulta $T(q/\dot{q}) > 0$ (*strettamente positivo*) per ogni moto possibile: $q^\alpha, \dot{q}^h$ arbitrari, $\dot{q}^0 = 1$, restando esclusa la quiete.

$m_0 > 0$, con i coefficienti di T:

$$(2) \qquad g_{\alpha\beta}(q) \equiv \frac{1}{m_0} a_{\alpha\beta} \sim ds^2 \equiv \frac{2}{m_0} \mathrm{T}\, dt^2 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n).$$

In tale V_{n+1}, a *metrica definita positiva*, le equazioni di *Lagrange* e il teorema dell'energia si riassumono nel legame, di tipo newtoniano [1]:

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{D}(m_0 v_\alpha)}{dt} = \mathrm{F}_\alpha \qquad (\alpha, 0, 1, \cdots, n),$$

essendo: D la *differenziazione assoluta*, costruita con i simboli di *Christoffel* associati alla metrica (2); $v_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$ la *velocità* (covariante) *rappresentativa* di S in V_{n+1} ($m_0 v_h \equiv p_h$ i *momenti cinetici* ordinari e $m_0 v_0 \equiv \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_0$); F_α infine la componente lagrangiana complessiva delle forze attive e delle reazioni vincolari:

$$(4) \qquad \mathrm{F}_\alpha \equiv \mathrm{Q}_\alpha + \mathrm{R}_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n).$$

Se i *vincoli* sono *perfetti*: $\mathrm{W}^{(r)} \equiv \mathrm{R}_h \dot{q}^h = 0 \;\forall \dot{q}^h$, si deve intendere $\mathrm{R}_h = 0$ ($h = 1, 2, \cdots, n$) e le (3) danno luogo direttamente, per $\alpha = h$, alle equazioni pure di movimento:

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{D}(m_0 v_h)}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^h} = \mathrm{Q}_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, n).$$

Il legame corrispondente ad $\alpha = 0$ (3):

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{D}(m_0 v_0)}{dt} = \mathrm{Q}_0 + \mathrm{R}_0,$$

vale invece a determinare, subordinatamente al moto, l'incognita dinamica R_0, cioè la *potenza effettiva* delle reazioni vincolari.

Se, più in particolare, i vincoli sono indipendenti dal tempo: $a_{0\alpha} \equiv 0$, $\mathrm{Q}_0 \equiv 0$, risulta $v_0 \equiv g_{0\alpha} \dot{q}^\alpha = 0$ e la (6) si riduce, come è naturale, alla condizione $\mathrm{R}_0 = 0$. Inoltre il teorema dell'energia diviene conseguenza delle (5).

2. LEGGE DELLA GEODETICA

L'equazione (3) non ha ancora carattere geometrico in V_{n+1}, a causa della presenza dell'ascissa temporale t, la quale figura tanto esplicitamente, quanto implicitamente, attraverso la velocità v_α. Si tratta pertanto di sostituire al parametro privilegiato t, il quale ha *significato globale* in V_{n+1}, un parametro arbitrario, definito unicamente sull'arco di linea oraria l rappresentativo del moto, ad esempio l'ascissa curvilinea s.

(3) Non si tratta del *teorema dell'energia*, il quale si ottiene da (3) moltiplicando per $v^\alpha \equiv \dot{q}^\alpha$.

Per motivi dimensionali, in luogo di s, assumeremo come parametro fondamentale il rapporto s/c:

$$\tau \equiv s/c \qquad (\textit{tempo proprio} \text{ di S}), \tag{7}$$

essendo c una *costante* avente le dimensioni di una velocità, la quale non ha necessariamente un significato fisico. Supporremo inoltre che la linea oraria l sia *orientata nel futuro*: $\dot{s} > 0$, ovvero

$$\chi = \dot{\tau} \equiv \sqrt{\frac{2\,T}{m_0\,c^2}} > 0\,, \tag{8}$$

senza tuttavia escludere la possibilità di una *inversione del tempo*.

Ciò premesso, riprendiamo la (3), ovvero la forma contravariante equivalente, introducendo l'*impulso* P^α:

$$P^\alpha \equiv m_0 \frac{dq^\alpha}{d\tau} \sim m_0 v^\alpha \equiv \chi P^\alpha \qquad (\alpha = 0\,, 1\,, \cdots, n)\,. \tag{9}$$

Si ottiene direttamente la *formulazione intrinseca*:

$$\frac{DP^\alpha}{d\tau} = K^\alpha \sim \frac{DP_\alpha}{d\tau} = K_\alpha \qquad (\alpha = 0\,, 1\,, \cdots, n)\,, \tag{10}$$

ove il *campo esterno* K^α è così definito:

$$K^\alpha \equiv \frac{1}{\chi^2}\left(F^\alpha - m_0 \frac{d\chi}{d\tau}\, v^\alpha\right) \qquad (\alpha = 0\,, 1\,, \cdots, n)\,, \tag{11}$$

ovvero

$$K^\alpha = \frac{m}{m_0}\left(\frac{m}{m_0}\, F^\alpha + \dot{m} v^\alpha\right)\,, \tag{11'}$$

essendo m il rapporto m_0/χ:

$$m \equiv m_0/\chi = m_0 \sqrt{\frac{m_0\,c^2}{2\,T}} > 0\,, \tag{12}$$

cui, per evidente analogia relativistica, daremo il nome di « massa relativa ».

La (10) ha *carattere assoluto*, nel senso che prescinde dal significato originario delle coordinate $q^\alpha : q^0 \equiv$ ascissa temporale, $q^h \equiv$ parametri lagrangiani di S. Essa mette in evidenza che, *anche nel caso di vincoli dipendenti dal tempo, la dinamica dei sistemi olonomi si può* sostanzialmente *riassumere nella legge* di moto di un « punto materiale » e, in particolare, nella legge *della geodetica*, per $K^\alpha = 0$. Si tratta di operare nello spazio degli eventi, assumendo come incognite fondamentali (almeno nel caso di vincoli perfetti) i parametri lagrangiani e la potenza delle reazioni vincolari; variabili di tipo cinematico e dinamico, rispettivamente.

In ogni caso, lo schema puntiforme in cui si riassume S, sia pure in una varietà ad $n + 1$ dimensioni, è quello di una *particella priva di struttura* *interna*: $m_0 \equiv$ cost. Ciò conformemente alla circostanza che S si suppone soggetto ad azioni puramente meccaniche, cioè di tipo *motore*, onde K^α è necessariamente ortogonale alla linea oraria l : $P_\alpha K^\alpha = 0$.

Pur con questa limitazione, la (11′) mette bene in evidenza, per il campo esterno K^α, la possibilità di *una legge di forza più generale di quella che ordinariamente si ammette* per le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva. Più precisamente, alla dipendenza dalle variabili ordinarie t, q^h e $\dot{q}^h$, che nella (11′) intervengono attraverso m, F^α e v^α, può aggiungersi la dipendenza dalla *derivata temporale* di m.

3. SISTEMI OLONOMI CON STRUTTURA INTERNA DI TIPO SCALARE

La legge di moto (10) mette in evidenza una stretta analogia formale tra la dinamica dei sistemi olonomi e la meccanica relativistica delle particelle, materiali o non [4]. Tale analogia suggerisce, a sua volta, una ovvia generalizzazione dello schema geometrico considerato, nel quale l'evoluzione del sistema olonomo S è rappresentata unicamente dalla sua linea oraria l. Si tratta – ferma restando la varietà degli eventi, con i suoi due elementi privilegiati: *congruenza* Γ_* delle linee temporali ($q^0 =$ var.), e *famiglia delle varietà* V_n^* *delle configurazioni* relative ad un dato istante ($q^0 =$ cost.) – di eliminare la restrizione per il campo esterno K^α di essere normale alla linea oraria l. Ciò equivale a supporre che S sia rappresentato, in V_{n+1}, dall'*insieme della sua linea oraria l e di una funzione scalare*: $m_0(\tau) > 0$ *definita su questa*, entrambe a priori incognite.

Se m_0 non è costante, diremo che S è dotato di una *struttura interna globale*, di tipo scalare [5]. Da questo punto di vista, come nella dinamica relativistica delle particelle con struttura interna scalare (cfr. ad esempio [11] p. 545 e sg.), la (10) costituisce una prima estensione della situazione classica. Invero essa non esclude che il sistema S sia sensibile, sia pure in misura globale, ad *azioni esterne di tipo termomeccanico*, eventualmente collegate a fenomeni d'urto con sistemi ad esso geometricamente equivalenti.

In questo contesto, un *problema dinamico* si dirà *ristretto* allo schema «punto materiale» se il campo esterno **K** si può supporre *noto* in funzione

(4) Un fotone può essere trattato come una particella materiale con struttura interna [10] (teoria corpuscolare della luce). Si tratta in sostanza di associare (cfr. [11], p. 564) ad una linea oraria del genere luce (sulla quale non esistono a priori parametri λ privilegiati come l'ascissa curvilinea) una grandezza di tipo scalare $m_0(\lambda)$: *frequenza propria*, la quale non è invariante, ma si trasforma, in un cambiamento della rappresentazione parametrica di l: $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda'(\lambda)$ con la seguente legge: $m_0' = m_0\, d\lambda'/d\lambda \sim m_0\, d/d\lambda = m_0'\, d/d\lambda' =$ inv.

(5) Si pensi ad un sistema olonomo suscettibile di perdita globale di massa, tale che i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ di cui all'energia cinetica (1) siano del tipo $a_{\alpha\beta} = m_0(t)\, g_{\alpha\beta}(q)$, cioè *funzioni note delle q^α, a meno di un fattore moltiplicativo dipendente dal tempo*. Tale è, ad esempio, il caso di una sferetta vincolata (senza attrito) a muoversi su di una lamina che si riscalda e si deforma, con legge nota, in seguito ad un flusso termico.

del tempo proprio di S, della sua posizione in V_{n+1} e del suo $n+1$ impulso:

$$K^\alpha = K^\alpha(\tau/x/P) \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n). \tag{13}$$

In tal caso, tenuto conto del legame (9) tra l'*impulso* e la *velocità propria* V^α, di norma pari a c^2:

$$P^\alpha = m_0 V^\alpha \quad , \quad m_0 c = \sqrt{P_\alpha P^\alpha} \quad , \quad V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \tag{14}$$

la determinazione della linea oraria l e della funzione m_0 è subordinata alla integrazione del sistema differenziale ordinario del 1° ordine:

$$\frac{DP^\alpha}{d\tau} = K^\alpha(\tau/x/P) \quad , \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{cP^\alpha}{\sqrt{P_\beta P^\beta}} \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n). \tag{15}$$

Si tratta di assegnare, in corrispondenza ad un valore del parametro τ, diciamo $\tau = 0$, le condizioni iniziali P_0^α e x_0^α:

$$P^\alpha = P_0^\alpha \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_0^\alpha \quad \text{per} \quad \tau = 0, \tag{16}$$

le quali non sono subordinate ad alcuna restrizione, tranne quella che P_0^α sia orientato nel futuro.

Il sistema (15), che assume come incognite le P^α e x^α, in numero di $2(n+1)$, si può tradurre in termini delle $n+2$ variabili più significative m_0 e x^α. Più precisamente, tenuto conto della $(14)_1$, si ha innanzitutto

$$\frac{dE_0}{d\tau} = q_0 \quad , \quad \frac{DV^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{E_0}(c^2 K^\alpha - q_0 V^\alpha), \frac{dx^\alpha}{d\tau} = V^\alpha, \tag{17}$$

essendo E_0 e q_0 rispettivamente l'*energia materiale* e la *potenza termica proprie*:

$$E_0 \equiv m_0 c^2 > 0 \quad , \quad q_0 \equiv K^\alpha V_\alpha . \tag{18}$$

D'altra parte la $(17)_2$ implica il legame differenziale

$$E_0 \frac{dx}{d\tau} = -2 q_0 x, \qquad \text{con} \quad x \equiv 1 - \frac{1}{c^2} V_\alpha V^\alpha;$$

da cui la condizione $x = 0 \sim V_\alpha V^\alpha = c^2 \, \forall\tau$, non appena questa sia verificata per $\tau = 0$. In altri termini, *il sistema* (15) *equivale a* (17), purchè questo ultimo sia *completato con la condizione iniziale* $V_\alpha V^\alpha = c^2$ per $\tau = 0$.

Pertanto, la dinamica ristretta dei sistemi olonomi con struttura interna, oltre che nelle (15) e (16), si può riassumere nel seguente sistema differenziale normale del 2° ordine:

$$\frac{dE_0}{d\tau} = q_0 \quad , \quad \frac{D^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{E_0}\left(c^2 K^\alpha - q_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n), \tag{19}$$

con condizioni iniziali del tipo

$$E_0 = E_{0,0} > 0 \quad , \quad x^\alpha = x_0^\alpha \quad , \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} = V_0^\alpha \qquad \text{per} \quad \tau = 0, \tag{20}$$

subordinate alla limitazione (essa pure iniziale):

$$g_{\alpha\beta}(x_0)\, V_0^\alpha V_0^\beta = c^2. \tag{21}$$

Per quanto infine riguarda *l'interpretazione geometrica* in V_{n+1} dei *moti naturali* di S, si può osservare che la $(10)_1$ si può scrivere nella *tipica forma delle geodetiche*:

$$\frac{D^* P^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad \left(\frac{D^* P^\alpha}{d\tau} \equiv \frac{dP^\alpha}{d\tau} + \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_\beta P^\beta\right), \tag{22}$$

con l'intesa che la differenziazione assoluta secondo $l: D^*$, sia costruita con la *connessione doppia* (legge di trasporto)

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_\beta \equiv \Gamma^\alpha_{\rho\beta} V^\rho - \frac{1}{E_0} K^\alpha V_\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n), \tag{23}$$

la quale non è definita globalmente in V_{n+1}, ma soltanto su l.

In ogni caso, le linee orarie dinamicamente possibili per S non sono generalmente le geodetiche di V_{n+1}, a meno che sia nullo il campo esterno K^α, nel qual caso si ha anche $m_0 = \text{cost}$. Si noti esplicitamente che, a differenza di D, *la differenziazione* D^* *non lascia invariata la metrica* (su l):

$$\frac{D^* g_{\alpha\beta}}{d\tau} = \frac{2}{E_0} V_{(\alpha} K_{\beta)} \neq 0 \sim \frac{D^* g^{\alpha\beta}}{d\tau} = -\frac{2}{E_0} V^{(\alpha} K^{\beta)}; \tag{24}$$

sì che in forma covariante la (22) si scrive

$$\frac{D^* P_\alpha}{d\tau} = \frac{2}{E_0} V_{(\alpha} K_{\beta)} P^\beta \neq 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n). \tag{25}$$

Ciò in accordo con la circostanza che la $(10)_2$, la quale si può scrivere nella forma analoga alla (22):

$$\frac{D_* P_\alpha}{d\tau} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, n) \tag{26}$$

mette in evidenza una *connessione* $\underset{*}{\Gamma}{}^\alpha_\beta$ *diversa dalla* (23):

$$\underset{*}{\Gamma}{}^\alpha_\beta \equiv \Gamma^\alpha_{\rho\beta} V^\rho + \frac{1}{E_0} K_\beta V^\alpha \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n), \tag{27}$$

e conseguentemente una *differente legge di trasporto*, anch'essa non permutabile con la metrica.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Ferrarese (1963) – *Sulle equazioni di moto di un sistema soggetto a un vincolo anolonomo mobile*, « Rend. Matem. Roma », *22*, 351–370.

[2] C. Cattaneo (1963) – *Sulla struttura locale delle equazioni dinamiche di un sistema anolonomo*, « Rend. Acc. Lincei », *34*, 396–402.

[3] C. Cattaneo (1959) – *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, « Ann. Matem. P. Appl. IV », *48*, 361–386.

[4] G. Ferrarese (1965) – *Proprietà di 2° ordine di un generico riferimento fisico in Relatività generale*, « Rend. Matem. Roma », *24*, 17–60.

[5] O. Rodrigues (1840) – *Des lois géométriques qui regissent*... « J. Math. Pures et Appl. », V, 5, 380–440.

[6] J. L. Synge (1927) – *On the geometry of dynamics*, « Phil. Trans. 226, A ».

[7] C. Agostinelli (1933) – *Sui sistemi di velocità e le famiglie naturali di linee in uno spazio curvo*, « Pont. Acad. Sci. Acta », *86*, 287–314.

[8] A. Nadile (1950–51) – *Forma sintetica delle equazioni di moto di un sistema anolonomo*, « Atti Sem. Matem. Fis. Univ. Modena », *5*, 126–39.

[9] E. Clauser (1955) – *Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili*, « Rend. Acc. Lincei », *19*, 33–39.

[10] C. Cattaneo (1959) – *Moto di un fotone libero in un campo gravitazionale*, « Rend. Acc. Lincei », *27*, 54–59.

[11] G. Ferrarese (1974) – *Lezioni di Meccanica razionale*, Roma. Veschi.