ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIORGIO FERRERO

**Sui sistemi dinamici soggetti a forze generalizzate
riducibili a forma canonica**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.5, p. 458–465.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_5_458_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_5_458_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sui sistemi dinamici soggetti a forze generalizzate riducibili a forma canonica* (*). Nota di GIORGIO FERRERO (**), presentata (***) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper a dynamical system with n degrees of freedom is considered, under the action of forces depending not only on the coordinates and time, but also on the lagrangian velocities and the accelerations, for which there is the lagrangian function or a kinetic potential, so that the equations of motion are reducible to the canonical form.

If the forces have a linear component in the lagrangian velocities, this component has a gyrostatic character.

If the lagrangian function has terms of the second degree in the lagrangian velocities, the corresponding forces depend on the accelerations.

An application is given to the motion of an electrically charged particle in a magnetic field, attracted by a fixed point according to a law generalising the Weber electrostatics.

1. Si consideri un sistema dinamico caratterizzato dal principio variazionale espresso dalla relazione

$$(1) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta \Lambda) dt = 0,$$

dove δT è l'incremento dell'energia cinetica del sistema nel passaggio sincrono dal moto naturale ad ogni altro moto (infinitamente vicino) compatibile coi vincoli, e $\delta \Lambda$ è il lavoro elementare compiuto dalle forze applicate al sistema nel medesimo passaggio. L'integrazione è estesa ad un intervallo arbitrario di tempo (t_0, t_1) durante il quale avviene il moto del sistema.

Supponiamo che si tratti di un sistema ad n gradi di libertà, la cui configurazione in ogni istante sia individuata da n parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$ e sia

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{rs}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s,$$

dove le $a_{rs} = a_{sr}$ sono funzioni delle q e di t .

(*) Lavoro fatto nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R. per il 1977/78.

(**) Istituto di Meccanica Razionale dell'Università di Torino. Via Carlo Alberto 10. Torino.

(***) Nella seduta del 13 maggio 1978.

Nell'ipotesi che gli incrementi δq_r dei parametri lagrangiani si annullino negli istanti estremi t_0 e t_1 , ma del resto siano funzioni arbitrarie del tempo, risulta come si sa

$$(3) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_r^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) \right] \delta q_r \, dt.$$

Sia inoltre

$$(4) \quad \delta \Lambda = \delta U + \sum_r^n Q_r \delta q_r = \sum_r^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_r} + Q_r \right) \delta q_r$$

dove U è una funzione delle q e di t e le Q_r sono funzioni delle $q, \dot{q}, t$.

La (1) porge per il moto del sistema le n equazioni differenziali

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} + Q_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dalle quali risulta che le componenti lagrangiane delle forze derivano in parte da un potenziale U ed in parte dipendono anche dalle velocità lagrangiane contenute nelle Q_r .

Se poniamo $\mathcal{L} = T + U$, le (5) si possono scrivere più semplicemente

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Introducendo inoltre i momenti $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}$, da cui si possono ricavare le $\dot{q}$ in

funzione delle q , delle p e di t , e ponendo $\mathcal{H} = \sum_r^n p_r \dot{q}_r - \mathcal{L}$, dove la $\mathcal{H}$ si può esprimere per mezzo delle q_r, p_r, t , col solito procedimento si deduce che alle equazioni del moto si può dare la forma quasi canonica

$$(7) \quad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} + Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dove le Q_r sono esprimibili mediante le q_r, p_r, t .

Se si suppongono i vincoli indipendenti dal tempo, affinchè le equazioni (7) ammettano l'integrale $\mathcal{H} = \text{costante}$ si deduce che deve essere

$$(8) \quad \sum_r^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} Q_r = \sum_r^n Q_r \dot{q}_r = 0.$$

Nel caso particolare in cui le Q_r siano composte di una parte lineare omogenea nelle $\dot{q}$ e di una parte omogenea quadratica nelle stesse $\dot{q}$, cioè

esse siano della forma

$$(9) \quad Q_r = \sum_1^n g_{rs} \dot{q}_s + \sum_1^n h_{rst} \dot{q}_s \dot{q}_t \quad (h_{st} = h_{ts})$$

la condizione (8) diventa

$$(10) \quad \sum_1^n g_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_1^n h_{rst} \dot{q}_r \dot{q}_s \dot{q}_t = 0$$

ed affinché questa sia identicamente soddisfatta qualunque siano le $\dot{q}$, occorre che sia

$$(11) \quad g_{rs} + g_{sr} = 0 \quad , \quad g_{rr} = 0$$

$$(12) \quad h_{rst} + h_{rts} + h_{str} + h_{srt} + h_{trs} + h_{tsr} = 0 \quad (r \neq s \neq t),$$

$$h_{rrs} + h_{rsr} + h_{srr} = 0 \quad (r \neq s); \quad h_{rrr} = 0.$$

Le condizioni (11) mostrano che le componenti delle forze, lineari nelle velocità lagrangiane, hanno carattere girostatico e se esistono soltanto queste componenti, sia cioè $Q_r = \sum_1^n g_{rs} \dot{q}_s$, si ha un risultato su cui è fondata una ricerca di P. Capodanno ⁽¹⁾.

2. Se si vuole che il sistema (6) assuma la forma lagrangiana consueta

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

con $L = \mathcal{L} + \mathcal{L}^*$, le Q_r devono essere della forma

$$(14) \quad Q_r = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_r} \right), \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dalle quali risulta che se la funzione lagrangiana aggiunta $\mathcal{L}^*$ è una funzione quadratica delle $\dot{q}$, allora le forze Q_r dipendono anche dalle accelerazioni $\ddot{q}$.

In questo caso, posto al solito $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$, e supposto che queste relazioni siano risolubili rispetto alle $\dot{q}$, nella forma $\dot{q}_r = \varphi_r(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t)$, introducendo la funzione caratteristica $H = \sum_1^n p_r \dot{q}_r - L$ alle equazioni (13) si possono sostituire le equazioni canoniche

$$(15) \quad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

(1) Cfr. Bibliografia [3].

Si consideri il caso in cui $\mathcal{L}^*$ è una funzione quadratica nelle $\dot{q}$ e precisamente nella forma

$$(16) \quad \mathcal{L}^* = \sum_1^n U_s \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_1^n U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t, \quad (U_{st} = U_{ts})$$

dove le U_s e le U_{st} sono funzioni delle q ed eventualmente del tempo.

In questo caso, per la (14), risulta

$$(17) \quad Q_r = \sum_1^n \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s + \sum_1^n \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U_{st}}{\partial q_r} - \frac{\partial U_{rs}}{\partial q_t} \right) \dot{q}_s \dot{q}_t - \\ - \sum_1^n U_{rs} \ddot{q}_s - \frac{\partial U_r}{\partial t} - \sum_1^n \frac{\partial U_{rs}}{\partial t} \dot{q}_s,$$

la quale mostra che la componente di Q_r lineare nelle velocità lagrangiane ha ancora carattere girostatico.

Se le U_{rs} sono tutte nulle allora $\mathcal{L}^*$, e quindi le Q_r , risultano lineari nelle velocità lagrangiane e si ha un risultato già stabilito dal Prof. Agostinelli (2).

3. Come caso particolare si consideri il moto di una particella P, mobile nello spazio, con velocità $\mathbf{v} = \frac{dP}{dt}$.

Essendo $L = T + U + \mathcal{L}^*$, per la (16) la funzione caratteristica hamiltoniana risulta data da

$$H = \sum_1^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - L = T - U + \frac{1}{2} \sum_1^n U_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

e se i vincoli sono indipendenti dal tempo le equazioni del moto ammettono l'integrale dell'energia $H = \text{costante}$.

In questo caso esiste un vettore $\mathbf{u}$ ed una sostituzione lineare simmetrica σ (dilatazione), per cui la $\mathcal{L}^*$ espressa dalla (16) si può scrivere

$$(18) \quad \mathcal{L}^* = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{v},$$

dove, supposti i vincoli indipendenti dal tempo è

$$(19) \quad \mathbf{v} = \sum_1^3 \frac{\partial P}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad U_s = \mathbf{u} \times \frac{\partial P}{\partial q_s}, \quad U_{st} = \sigma \frac{\partial P}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_t}.$$

Le U_{st} sono gli elementi della matrice simmetrica di 3° ordine che definisce l'omografia vettoriale σ .

(2) Cfr. Bibliografia [2].

Le forze generalizzate Q_r , espresse dalla (17), si possono mettere sotto la forma

$$(20) \quad Q_r = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{u} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(\sigma\mathbf{v})}{\partial q_r} \times \mathbf{v} - \sigma\mathbf{v} \times \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_r} \right\} - \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dt} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}.$$

Ora si può scrivere

$$\frac{\partial(\sigma\mathbf{v})}{\partial q_r} \times \mathbf{v} = \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP} \frac{\partial P}{\partial q_r} \times \mathbf{v} = K \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}$$

$$\sigma\mathbf{v} \times \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_r} = \sigma\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\partial P}{\partial q_r} = K \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\sigma\mathbf{v}) \times \frac{\partial P}{\partial q_r},$$

dove $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$ e $\frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP}$ sono derivate di vettori rispetto al punto e quindi omografie vettoriali, mentre $K \frac{d\mathbf{v}}{dP}$ e $K \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP}$ sono le loro coniugate o trasposte. Ne segue

$$Q_r = \left\{ \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{u} + \frac{1}{2} \left[K \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} - K \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\sigma\mathbf{v}) \right] - \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dt} \right\} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}.$$

Si osservi inoltre che, essendo $T = \frac{1}{2} m v^2$, dove m è la massa della particella mobile, si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial U}{\partial q_r} = \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \text{grad } U \right) \times \frac{\partial P}{\partial q_r},$$

e pertanto dalla (13) si deduce, per il moto della particella, la seguente equazione

$$(21) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{u} + \text{grad } U + \frac{1}{2} \left[K \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} - K \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\sigma\mathbf{v}) \right] - \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dt},$$

che è, in forma assoluta, l'equazione del moto di un punto materiale soggetto a forze funzioni quadratiche nella velocità e lineare nell'accelerazione, che derivano da una funzione lagrangiana.

4. Si supponga in particolare che $\mathbf{u}$ sia il potenziale vettore di un campo magnetico $\mathbf{B}$, e precisamente sia $e\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{u}$, dove e è la carica elettrica della particella mobile. Sia inoltre $U = e\Phi$, con Φ potenziale di campo elettrico, cioè $\mathbf{E} = \text{grad } \Phi$. In questo caso l'equazione del moto (21) diventa

$$(22) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + \text{grad } \Phi) + \frac{1}{2} \left\{ K \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dP} \mathbf{v} - K \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\sigma\mathbf{v}) \right\} - \frac{d(\sigma\mathbf{v})}{dt},$$

che è l'equazione del moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico ed elettrico sovrapposti, soggetto inoltre a forza funzione quadratica

della velocità e lineare nella accelerazione, che deriva da una funzione lagrangiana.

Più in particolare si consideri il caso in cui, con riferimento a coordinate sferiche $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ le ultime forze derivino dal potenziale cinetico $U_{11}(r) \frac{\dot{r}^2}{2}$.

In questo caso l'equazione precedente diventa

$$(23) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + \text{grad } \Phi) - \left[\frac{1}{2} \frac{dU_{11}}{dr} \dot{r}^2 + U_{11}(r) \ddot{r} \right] \text{grad } r$$

Se si pone

$$\Phi = \frac{1}{r}, \quad U_{11} = \frac{2e}{c^2 r}$$

dove c è la velocità della luce, l'equazione (23) diventa

$$(24) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \frac{e}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2} \right) \text{grad } r$$

che è l'equazione del moto di una particella elettrizzata soggetta ad un campo magnetico $\mathbf{B}$ ed attirata da un punto fisso con la legge elettrodinamica di Weber ⁽³⁾.

L'equazione (23) ammette l'integrale dell'energia che si ottiene moltiplicandone ambo i membri scalarmente per $\mathbf{v}$, e risulta

$$(25) \quad \frac{1}{2} m v^2 - e\Phi + \frac{1}{2} U_{11}(r) \dot{r}^2 = h \text{ (costante)}$$

dove

$$(26) \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2.$$

Per $\Phi = \frac{1}{r}$ ed $U_{11} = \frac{2e}{c^2 r}$, esso diventa

$$(27) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) = h.$$

Se il campo è a simmetria assiale, cioè indipendente dalla anomalia φ , ed inoltre si suppone che la componente trasversale B_φ del campo magnetico sia nulla, si può porre $\mathbf{u} = eW(r, \theta) \text{grad } \varphi$, con W funzione di r e θ e quindi

$$(28) \quad \mathbf{B} = \text{rot}(W \text{grad } \varphi) = \text{grad } W \wedge \text{grad } \varphi.$$

(3) Cfr. Bibliografia [4] pag.; 194.

In questo caso l'equazione (23) diventa

$$(29) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\dot{\phi} \text{grad } W - \frac{dW}{dt} \text{grad } \phi \right) + e \text{grad } \Phi - \\ - \left[\frac{1}{2} \frac{dU_{11}}{dr} \dot{r}^2 + U_{11}(r) \ddot{r} \right] \text{grad } r,$$

che dà luogo alle seguenti equazioni scalari

$$(30) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \text{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2) = e\dot{\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + e \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \left[\frac{1}{2} \frac{dU_{11}}{dr} \dot{r}^2 + U_{11}(r) \ddot{r} \right] \\ m \left\{ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \text{sen } \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right\} = e\dot{\phi} \frac{\partial W}{\partial \theta} + e \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi} + eW) = 0.$$

Sussiste dunque l'integrale dei momenti

$$(31) \quad mr^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi} + eW = c_0 (\text{costante}),$$

ed eliminando $\dot{\phi}$ dalle altre due equazioni, esse si possono mettere nella forma

$$(32) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ e\Phi - \frac{(c_0 - eW)^2}{2mr^2 \text{sen}^2 \theta} \right\} - \left[\frac{1}{2} \frac{dU_{11}}{dr} \dot{r}^2 + U_{11}(r) \ddot{r} \right] \\ m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ e\Phi - \frac{(c_0 - eW)^2}{2mr^2 \text{sen}^2 \theta} \right\},$$

che sono le equazioni del moto piano di un punto in coordinate polari r, θ soggetto ad una forza che deriva dal potenziale

$$(33) \quad U = e\Phi(r, \theta) - \frac{(c_0 - eW)^2}{2mr^2 \text{sen}^2 \theta},$$

ed a una forza supplementare dipendente dal quadrato della velocità radiale e dall'accelerazione radiale.

Le equazioni (32) ammettono l'integrale dell'energia

$$(34) \quad \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \left\{ e\Phi - \frac{(c_0 - eW)^2}{2mr^2 \text{sen}^2 \theta} \right\} + \frac{1}{2} U_{11} \dot{r}^2 = \text{costante}$$

che si ottiene dall'integrale (25), quando dall'espressione di v^2 si elimina $\dot{\phi}$, mediante l'integrale (31) dei momenti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. AGOSTINELLI (1948) - *Lezioni di Meccanica Superiore* - ediz. V. Giorgio, Torino.
- [2] C. AGOSTINELLI (1946) - *Sui sistemi dinamici con forze funzioni lineari nelle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, fasc. 2 e fasc. 3-4.
- [3] P. CAPODANNO (1977) - *Sur quelques extensions d'un théorème de Levi-Civita aux systèmes gyroscopiques*, « C.R. Acad. Sc. Paris », 284, Serie A.
- [4] ANNALEN DER PHYSIK (1848) - Vol. LXXIII.