Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luisa Arlotti

La distribuzione di Boltzmann ricavata come distribuzione limite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.4, p. 379–384.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_4_379_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Scienza dell'informazione. — *La distribuzione di Boltzmann ricavata come distribuzione limite* (*). Nota di LUISA ARLOTTI, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The probability distribution of a discrete scheme maximizing the entropy of degree β, the average value of a random variable being fixed, is proved to converge as $\beta \to 1$ to the Boltzmann distribution which maximizes, under the same conditions, the Shannon entropy.

1. INTRODUZIONE

In una Nota precedente [1] (che indicherò brevemente con P ed a cui rimando per le notazioni) ho dimostrato che dato il valor medio $\bar{U}$ di una variabile aleatoria U la quale assume i valori $u_1 = 0 < u_2 < \cdots < u_n$ esiste una ed una sola distribuzione di probabilità $\{\bar{p}_i\}$ tale che

$$(a) \quad \bar{p}_i \geq 0 \qquad (b) \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i = 1 \qquad (c) \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i u_i = \bar{U}$$

e per la quale risulta massima l'entropia di grado β

$$H_\beta(p_1, \cdots, p_n) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\beta - 1 \right).$$

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che se, tenendo fisso $\bar{U}$, si varia β e si indica con $\{p_i(\beta)\}$ la corrispondente distribuzione massimizzante questa, per β tendente ad 1, tende alla distribuzione di Boltzmann. In tal modo la distribuzione di Boltzmann viene ottenuta come distribuzione limite.

2. DEDUZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN

Allo scopo mi serviranno i seguenti Lemmi

LEMMA 1. *Comunque fissato* $\bar{U} \in]0, u_n[$ *esiste* $\beta_{\bar{U}} > 1$ *tale che* $\forall \beta \in]0, \beta_{\bar{U}}[$, $\beta \neq 1$, *è* $p_i(\beta) > 0 \ \forall i$.

Dimostrazione. In virtù del Lemma 1 di P e della definizione di $p_i(\beta)$ è certamente $p_i(\beta) > 0 \ \forall i$ se $\beta \in]0, 1[$. Si supponga perciò $\beta > 1$. Dai Lemmi 2 e 3 di P si riconosce che per ogni fissato $\beta > 1$ è $\bar{p}_i > 0 \ \forall i$ se e solo se sussistono le condizioni del Lemma 2 ed è $\bar{\gamma} \in I_{n-1} =]-1/u_n, +\infty[$. Poiché

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'8 aprile 1978.

la funzione $Y_\beta(\gamma)$ è continua e crescente in I_{n-1} ciò equivale a dire che è $Y_\beta(-1/u_n) < \bar{U} < Y_\beta(+\infty)$, cioè

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (u_n - u_i)^{1/(\beta-1)} u_i}{\sum_{i=1}^{n} (u_n - u_i)^{1/(\beta-1)}} < \bar{U} < \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^{\beta/(\beta-1)}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^{1/(\beta-1)}} .$$

D'altra parte è anche

$$\lim_{\beta\to 1^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} (u_n - u_i)^{1/(\beta-1)} u_i}{\sum_{i=1}^{n} (u_n - u_i)^{1/(\beta-1)}} = 0 \qquad \lim_{\beta\to 1^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^{\beta/(\beta-1)}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^{1/(\beta-1)}} = u_n .$$

Si può così concludere che comunque fissato $\bar{U} \in]0, u_n[$ esiste corrispondentemente $\beta_{\bar{U}} > 1$ tale che $\forall \beta \in]1, \beta_{\bar{U}}[$ l'intervallo $]Y_\beta(-1/u_n), Y_\beta(+\infty)[$ contiene $\bar{U}$ e quindi è $p_i(\beta) > 0 \ \forall i$.

In virtù di questo Lemma se $\beta \in A_{\bar{U}} =]0, 1[\cup]1, \beta_{\bar{U}}[$, la distribuzione massimizzante è

$$p_i(\beta) = \frac{(1 + \gamma(\beta) u_i)^{1/(\beta-1)}}{\sum_{j=1}^{n} (1 + \gamma(\beta) u_j)^{1/(\beta-1)}} \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

essendo $\gamma(\beta)$ la funzione definita in $A_{\bar{U}}$ implicitamente tramite l'equazione

$$Y_\beta(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 + \gamma u_i)^{1/(\beta-1)} u_i}{\sum_{i=1}^{n} (1 + \gamma u_i)^{1/(\beta-1)}} = \bar{U} .$$

Sia poi per definizione $\gamma(1) = 0$.

LEMMA 2. *La funzione* $\gamma(\beta)$ *è continua nel punto* 1.

Dimostrazione. Per la dimostrazione studierò la funzione di due variabili definita in $A_{\bar{U}} \times I_{n-1}$ da $Y(\beta, \gamma) = Y_\beta(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$, essendo

$$q_i = \frac{(1 + \gamma u_i)^{1/(\beta-1)}}{\sum_{j=1}^{n} (1 + \gamma u_j)^{1/(\beta-1)}} \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Risulta

$$\frac{\partial Y}{\partial \gamma} = (\beta - 1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} q_i u_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i u_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} q_i v_i \right) \right]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = -(\beta - 1)^{-2} \left[\sum_{i=1}^{n} q_i u_i w_i - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i u_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} q_i w_i \right) \right]$$

avendo posto $v_i = u_i(1 + \gamma u_i)^{-1}$, $w_i = \log(1 + \gamma u_i)$ e quindi, per le proposizioni A e B di P, $\partial Y/\partial\gamma$ ha lo stesso segno di $\beta - 1$, mentre $\partial Y/\partial\beta$ ha segno opposto a γ. Per il Teorema del Dini la funzione $\gamma(\beta)$ è derivabile in $A_{\bar{U}}$ con derivata

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{\beta - 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)(u_i - \bar{U}) \log(1 + \gamma(\beta) u_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)(u_i - \bar{U}) u_i (1 + \gamma(\beta) u_i)^{-1}} .$$

Tenendo conto delle osservazioni precedenti è facile riconoscere che $d\gamma/d\beta$ ha lo stesso segno di $(\beta - 1)\gamma(\beta)$.

Essendo $Y(\beta, 0) = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$ e $Y(\beta, \gamma(\beta)) = \bar{U}$, ed essendo $Y_\beta(\gamma)$ monotona crescente per $\beta > 1$ e decrescente per $0 < \beta < 1$, risulterà per $\beta > 1$ $\gamma(\beta) \gtreqless 0$ a seconda che $\bar{U} \gtreqless \sum_{i=1}^{n} u_i/n$ e viceversa per $0 < \beta < 1$. Pertanto è, per ogni valore di β, $d\gamma/d\beta \gtreqless 0$ a seconda che $\bar{U} \gtreqless \sum_{i=1}^{n} u_i/n$. Fissato $\bar{U}$, la funzione $\gamma(\beta)$ è dunque monotona in ciascuno degli intervalli $]0, 1[$ e $]1, \beta_{\bar{U}}[$: crescente per $\bar{U} > \sum_{i=1}^{n} u_i/n$, nulla per $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$, decrescente per $\bar{U} < \sum_{i=1}^{n} u_i/n$. Tenendo conto del segno di $\gamma(\beta)$ si riconosce che esistono finiti i limiti $\lim_{\beta\to 1^-} \gamma(\beta)$ e $\lim_{\beta\to 1^+} \gamma(\beta)$.

Si riconosce poi che questi limiti valgono zero. Se infatti fosse $\lim_{\beta\to 1^+} \gamma(\beta) = \bar{\gamma} \neq 0$ sarebbe anche

$$\lim_{\beta\to 1^+} Y(\beta, \gamma(\beta)) = \lim_{\beta\to 1^+} Y(\beta, \bar{\gamma}) = \begin{cases} u_n & \text{per } \bar{\gamma} > 0 \\ u_1 = 0 & \text{per } \bar{\gamma} < 0 . \end{cases}$$

Poiché anche l'ipotesi $\lim_{\beta\to 1^-} \gamma(\beta) \neq 0$ conduce all'assurdo resta dimostrata la continuità della funzione $\gamma(\beta)$.

LEMMA 3. *La funzione $\gamma(\beta)$ ha le derivate destra e sinistra nel punto $\beta = 1$.*

Dimostrazione. Escluso il caso $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$, cui corrisponde $\gamma(\beta) = 0$, e posto

$$\forall\beta \neq 1 \quad g(\beta) = (\beta - 1)^{-1} \log(1 + \gamma(\beta) u_2) ,$$

risulta

$$g'(\beta) = (\beta - 1)^{-2} [-\log(1 + \gamma(\beta) u_2) + (\beta - 1) u_2 (1 + \gamma(\beta) u_2)^{-1} \gamma'(\beta)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)(u_i - \bar{U}) [-u_i(1 + \gamma(\beta) u_i)^{-1}(1 + \gamma(\beta) u_2) \log(1 + \gamma(\beta) u_2) + u_2 \log(1 + \gamma(\beta) u_i)]}{(\beta - 1)^2 (1 + \gamma(\beta) u_2) \left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)(u_i - \bar{U}) u_i (1 + \gamma(\beta) u_i)^{-1}\right]} .$$

La somma del denominatore è positiva, poiché vale $(\beta - 1)\, \partial Y(\beta, \gamma(\beta))/\partial\gamma$. Vediamo che anche la somma del numeratore è positiva. Questa infatti si può scrivere nella forma

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)(u_i - \bar{U}) f_\beta(u_i) = \sum_{i=2}^{n} p_i(\beta) f_\beta(u_i) u_i - \\ - \left(\sum_{i=2}^{n} p_i(\beta) u_i\right)\left(\sum_{i=2}^{n} p_i(\beta) f_\beta(u_i)\right)$$

essendo $\forall x \in [0, u_n]$

$$f_\beta(x) = -x(1 + \gamma(\beta)x)^{-1}(1 + \gamma(\beta)u_2)\log(1 + \gamma(\beta)u_2) + \\ + u_2 \log(1 + \gamma(\beta)x).$$

Poiché è $\gamma(\beta)u_2 \neq 0$ e quindi $\log(1 + \gamma(\beta)u_2) < \gamma(\beta)u_2$ risulta $\forall x > u_2$

$$f'_\beta(x) = (1 + \gamma(\beta)x)^{-2}[-(1 + \gamma(\beta)u_2)\log(1 + \gamma(\beta)u_2) + \\ + u_2\gamma(\beta)(1 + \gamma(\beta)x)] > u_2\gamma^2(\beta)(1 + \gamma(\beta)x)^{-2}(x - u_2) > 0.$$

In conseguenza di ciò è $f_\beta(u_i) < f_\beta(u_{i+1})$ $(1 < i < n)$ e quindi per la Proposizione A di P è $S > 0$. Si può così concludere che $\forall\beta \in A_{\bar{U}}$ la funzione $g(\beta)$ ha derivata positiva; pertanto essa è dotata di limite destro e sinistro nel punto $\beta = 1$. È inoltre

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{\gamma(\beta)u_2}{(\beta - 1)g(\beta)} = \lim_{\beta \to 1} \frac{\gamma(\beta)u_2}{\log(1 + \gamma(\beta)u_2)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1 + t)} = 1.$$

I risultati stabiliti e le identità

$$\frac{\gamma(\beta) - \gamma(1)}{\beta - 1} = \frac{\gamma(\beta)}{\beta - 1} = \frac{\gamma(\beta)u_2}{(\beta - 1)g(\beta)} \frac{g(\beta)}{u_2} \tag{1}$$

permettono di affermare che esistono le derivate sinistra e destra della funzione $\gamma(\beta)$ nel punto 1.

LEMMA 4. *Le derivate della funzione $\gamma(\beta)$ nel punto $\beta = 1$ sono entrambe finite.*

Dimostrazione. La tesi è evidente nel caso $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$, nel quale risulta $\gamma'(1) = 0$.

Pertanto considero i casi rimanenti ed esamino dapprima la derivata sinistra.

Poiché la funzione $g(\beta)$ è monotona crescente in $]0, 1[$ il limite sinistro di $g(\beta)$ nel punto $\beta = 1$ non può essere $-\infty$; dalla (1) si deduce che anche la derivata sinistra della funzione $\gamma(\beta)$ nel punto $\beta = 1$ non può essere $-\infty$. Si supponga che sia $+\infty$.

Se così fosse si avrebbe

$$\lim_{\beta\to 1^-}\left(\frac{1+\gamma(\beta)\,u_j}{1+\gamma(\beta)\,u_i}\right)^{1/(\beta-1)} = \lim_{\beta\to 1^-}\exp\frac{\log(1+\gamma(\beta)\,u_j)-\log(1+\gamma(\beta)\,u_i)}{\beta-1} =$$

$$= \lim_{\beta\to 1^-}\exp\left[\frac{\log\left(1+\dfrac{\gamma(\beta)(u_j-u_i)}{1+\gamma(\beta)\,u_i}\right)}{\dfrac{\gamma(\beta)(u_j-u_i)}{1+\gamma(\beta)\,u_i}}\;\frac{\dfrac{\gamma(\beta)(u_j-u_i)}{1+\gamma(\beta)\,u_i}}{\beta-1}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{per } j>i \\ 0 & \text{per } j<i\,. \end{cases}$$

Sarebbe dunque

$$\lim_{\beta\to 1^-} p_i(\beta) = \lim_{\beta\to 1^-}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1+\gamma(\beta)\,u_j}{1+\gamma(\beta)\,u_i}\right)^{1/(\beta-1)}\right]^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{per } i<n \\ 1 & \text{per } i=n\,. \end{cases}$$

Ciò implica $\lim_{\beta\to 1^-} Y(\beta\,,\gamma(\beta)) = \lim_{\beta\to 1^-}\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)\,u_i = u_n$, mentre è per ipotesi $Y(\beta\,,\gamma(\beta)) = \bar{U} < u_n$.

Risulta così dimostrato che la derivata sinistra della funzione $\gamma(\beta)$ nel punto $\beta = 1$ è finita. In modo analogo si riconosce che è finita la derivata destra.

Sono ora in grado di dimostrare il Teorema oggetto della presente Nota.

TEOREMA. *La funzione* $\gamma(\beta)$ *è derivabile nel punto* $\beta = 1$. *Pertanto, posto* $\lambda = \gamma'(1)$, *per* β *tendente ad* 1 *la distribuzione* $\{p_i(\beta)\}$ *tende alla distribuzione* $\left\{\dfrac{e^{\lambda u_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda u_j}}\right\}$ *la quale è la distribuzione di Boltzmann corrispondente al dato valore di* $\bar{U}$.

Dimostrazione. Se è $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$ e quindi $\gamma(\beta) = 0$ risulta semplicemente $\lambda = 0$, $\lim_{\beta\to 1} p_i(\beta) = p_i(\beta) = 1/n = \dfrac{e^{\lambda u_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda u_j}}$, da cui la tesi.

Nei rimanenti casi, in virtù del Lemma 4, si ottiene $\forall i$

$$\lim_{\beta\to 1^-}(1+\gamma(\beta)\,u_i)^{1/(\beta-1)} = \lim_{\beta\to 1^-}\exp\frac{\log(1+\gamma(\beta)\,u_i)}{\beta-1} =$$

$$= e^{\gamma'_-(1)u_i}\quad,\quad \lim_{\beta\to 1^-} p_i(\beta) = \frac{e^{\gamma'_-(1)u_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\gamma'_-(1)u_j}}$$

$$\lim_{\beta\to 1^+}(1+\gamma(\beta)\,u_j)^{1/(\beta-1)} = \lim_{\beta\to 1^+}\exp\frac{\log(1+\gamma(\beta)\,u_i)}{\beta-1} =$$

$$= e^{\gamma'_+(1)u_j}\quad,\quad \lim_{\beta\to 1^+} p_i(\beta) = \frac{e^{\gamma'_+(1)u_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\gamma'_+(1)u_j}}\,.$$

Essendo d'altra parte $\forall \beta \in A_{\bar{U}}\ Y(\beta, \gamma(\beta)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\beta)\, u_i = \bar{U}$ è altresì

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \lim_{\beta \to 1^-} p_i(\beta) = \sum_{i=1}^{n} u_i \lim_{\beta \to 1^+} p_i(\beta) = \bar{U}\,.$$

Dall'unicità della distribuzione di Boltzmann $\{p_i\}$ verificante la condizione $\sum_{i=1}^{n} p_i u_i = \bar{U}$ la tesi segue ora immediata.

L'Autore desidera esprimere la sua sincera riconoscenza al prof. Pietro Benvenuti per i suoi consigli ed incoraggiamenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. ARLOTTI (1978) – *Sulla massimizzazione dell'entropia di grado* β *nel caso discreto*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », LXIV, pp. 285-291.