Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Margareta Ignat

Sulle onde piane in un plasma rarefatto, radiativo elettricamente anisotropo. Parte II. Onde piane particolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.4, p. 374–378.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_4_374_0>

Magnetofluidodinamica. — *Sulle onde piane in un plasma rarefatto, radiativo elettricamente anisotropo.* Parte II. *Onde piane particolari.* Nota di MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Making use of the results of the previous paper on the small perturbations in a rarefied, radiative and electrically anisotropic plasma, in this second paper we consider the propagation of plane waves and we examine some remarkable particular cases.

3. LE ONDE PIANE

Continuando lo studio delle piccole perturbazioni in un plasma rarefatto, radiativo ed elettricamente anisotropo, supponiamo ora che tutte le grandezze perturbate siano proporzionali ad $e^{i(\omega t-\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{r})}$, dove $\mathbf{X}$ è il vettore d'onda, $\mathbf{X} = \mathrm{X}_1 \boldsymbol{i} + \mathrm{X}_3 \boldsymbol{k}$. In ciò che segue noteremo i coefficienti di proporzionalità colle stesse lettere come le grandezze rispettive. Allora, le equazioni fondamentali (3), (5) e (6) della Nota I diventano

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}(\sigma_e + i\omega\,\varepsilon_{\perp 0})\,\mathrm{I}_x + (\varepsilon_{//0} - \varepsilon_{\perp 0})\, i\omega\, \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_3 \mathrm{I}_z = \sigma_e \mathrm{B}_0 \{\sigma_e \mathrm{X}_3^2 + i\omega\,\varepsilon_{\perp 0}\mathrm{M}\}\, v_y\,,\\
&\mathrm{MI}_y = -\sigma_e \mathrm{B}_0 (\mathrm{X}^2 - \mu\varepsilon_{\perp 0}\,\omega^2)\, v_x \quad , \quad \mathrm{M} \equiv \mathrm{X}^2 + i\omega\mu\,(\sigma_e + i\omega\varepsilon_{\perp 0})\,,\\
&\{\mathrm{M}(\sigma_e + i\omega\varepsilon_{//0}) - (\varepsilon_{//0} - \varepsilon_{\perp 0})\, i\omega\, \mathrm{X}_1^2\}\,\mathrm{I}_z = -\sigma_e^2 \mathrm{B}_0 \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_3 v_y\,,\\
&\left\{\mathrm{A}\left[\frac{3\,i\omega}{c}\left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) + \mathrm{X}_1^2\right] + 3\,\alpha_0\, i\omega\left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right)\right\} q_x^{(\mathrm{R})} + \mathrm{AX}_1 \mathrm{X}_3\, q_z^{(\mathrm{R})} =\\
&\qquad = -16\,\sigma\alpha_0 \mathrm{T}_0^3 \left(\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial \rho_0}\right)_{\mathrm{S}_0} \rho_0 (\mathrm{X}_1^2 v_x + \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_3 v_z)\,,\\
(\mathrm{III})\qquad &q_y^{(\mathrm{R})} = 0 \quad , \quad \mathrm{A} \equiv i\omega + \frac{16\,\sigma\alpha_0 \mathrm{T}_0^3}{\rho_0 \mathrm{C}_{\mathrm{V}_0}}\,;\\
&\mathrm{A}\left[\frac{3\,i\omega}{c}\left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) + \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_3\right] q_x^{(\mathrm{R})} +\\
&\qquad + \left[\mathrm{AX}_3^2 + 3\,\alpha_0\, i\omega\left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right)\right] q_z^{(\mathrm{R})} =\\
&\qquad = -16\,\sigma\alpha_0 \mathrm{T}_0^3 \left(\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial \rho_0}\right)_{\mathrm{S}_0} \rho_0 (\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_3 v_x + \mathrm{X}_3^2 v_z)\,,
\end{aligned}
$$

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1978.

$$\sigma_e B_0 [-\omega^2 + 2 c_\perp^2 X_1^2 - (c_{//}^2 - c_\perp^2) X_3^2] v_x + \sigma_e B_0 c_\perp^2 X_1 X_3 v_z +$$
$$+ [c_\perp^2 X_1^2 - (c_{//}^2 - c_\perp^2) X_3^2 - \sigma_e \mu i\omega V_a^2] I_y -$$
$$- \sigma_e B_0 \frac{i\omega}{c\rho_0} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) q_x^{(R)} = 0 \,,$$

$$\text{(III)} \quad -\sigma_e B_0 [\omega^2 + (c_{//}^2 - c_\perp^2) X_3^2] v_y + [(c_{//}^2 - c_\perp^2) X_3^2 + \mu\sigma_e V_a^2 i\omega] I_x -$$
$$- (c_{//}^2 - c_\perp^2) X_1 X_3 I_z = 0 \,,$$

$$\sigma_e B_0 c_\perp^2 X_1 X_3 v_x + \sigma_e B_0 [-\omega^2 + 3 c_{//}^2 X_3^2] v_z -$$
$$- (3 c_{//}^2 - c_\perp^2) X_1 X_3 I_y - \sigma_e B_0 \frac{i\omega}{c\rho_0} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) q_z^{(R)} = 0 \,,$$

in cui $V_a^2 = B_0^2/\rho_0 \mu$ è il quadrato della velocità di Alfvén. Il sistema (III) consiste di 9 equazioni scalari, lineari e omogenee nelle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{I}$ e $\boldsymbol{q}^{(R)}$. Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti si può trovare l'equazione di dispersione del nostro problema. Poiché essa sarebbe troppo complicata, in ciò che segue esamineremo soltanto due casi particolari notevoli.

4. Casi particolari

a) $X_1 = 0$.

Trattandosi di onde che si propagano nella direzione del campo magnetico iniziale $\mathbf{B}_0$, il sistema (III) diventa

$$MI_x = \sigma_e B_0 (X^2 - \omega^2 \varepsilon_{10} \mu) v_y \,;$$
$$MI_y = - \sigma_e B_0 (X^2 - \omega^2 \varepsilon_{10} \mu) v_x \quad ; \quad MI_z = 0 \,,$$
$$q_x^{(R)} = 0 \quad ; \quad q_y^{(R)} = 0 \quad ; \quad L q_z^{(R)} + 16 \sigma\alpha_0 T_0^3 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0}\right)_{S_0} X^2 v_z \,;$$
$$\text{(IV)} \qquad L \equiv AX^2 + 3 i\alpha_0 \omega \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) ,$$
$$\sigma_e B_0 [\omega^2 + (c_{//}^2 - c_\perp^2) X^2] v_x + [(c_{//}^2 - c_\perp^2) X^2 + \sigma_e \mu i\omega V_a^2] I_y = 0 \,,$$
$$\sigma_e B_0 [\omega^2 + (c_{//}^2 - c_\perp^2) X^2] v_y - [(c_{//}^2 - c_\perp^2) X^2 + \sigma_e \mu i\omega V_a^2] I_x = 0 \,,$$
$$\left\{(\omega^2 - 3 c_{//}^2 X^2) L - \frac{i\omega}{c} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) 16 \sigma\alpha_0 T_0^3 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0}\right)_{S_0} X^2\right\} v_z = 0 \,.$$

Da $(\mathrm{IV}.1_3)$ si rileva che sussistono due possibilità

i) $M = X^2 + i\mu\omega (\sigma_e + i\omega\varepsilon_{10}) = 0$, $I_z \neq 0$, cioè siamo in presenza di *onde elettromagnetiche generalizzate*, *smorzate* (se $\sigma_e \neq 0$). Inoltre, in questo caso si ha: $\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{q}^{(R)} = 0$, $\mathbf{I} = I_z \boldsymbol{k}$, con I_z-arbitrario.

ii) $I_z = 0$, $M \neq 0$. Poiché $M \neq 0$, le equazioni (IV.$1_{1,2}$) si possono risolvere e i valori di I_x e rispettivamente I_y introdotti nelle (IV.3) e (IV.4) ci forniscono la

$$(7)\qquad \Big\{\omega^2 + (c_{//}^2 - c_{\perp}^2)\, X^2 - \\ - [(c_{//}^2 - c_{\perp}^2)\, X^2 + \sigma_e\, i\mu\omega\, V_a^2]\, \frac{1}{M}\, (X^2 - \omega^2 \varepsilon_{10}\, \mu)\Big\} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0 ,$$

relazione che deve essere considerata accanto a (IV.5). Allora, ne segue

o)

$$(8)\qquad X^2 [\omega + i\mu\sigma_e (c_{//}^2 - c_{\perp}^2 - V_a^2)] + i\mu\omega^2 (\sigma_e + i\omega\, \varepsilon_{10} + \sigma_e\, \mu\varepsilon_{10}\, V_a^2) = 0 .$$

Ora i 3 vettori fondamentali hanno la forma: $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{q}^{(R)} = 0$; $\mathbf{I} = I_x \boldsymbol{i} + I_y \boldsymbol{j}$, con v_x, v_y arbitrari.

Se il plasma ha una alta conduttività elettrica ($\sigma_e \to \infty$), l'equazione (8) si riduce alla

$$X^2 = \omega^2\, \frac{1 + \mu\varepsilon_{10}\, V_a^2}{V_a^2 + c_{\perp}^2 - c_{//}^2} ,$$

o, più in particolare, se il campo magnetico è debole $\left(c_{//}^2 \cong c_{\perp}^2 \text{ e } V_a^2 \ll \dfrac{1}{\mu\varepsilon_{10}}\right)$, alla ben nota $\omega^2/X^2 = V_a^2$, la quale caratterizza le *onde trasversali di Alfvén*.

Supponendo al contrario che la conduttività elettrica sia sufficientemente piccola da poterla trascurare ($\sigma_e \to 0$), la formula (8) si riduce alla $X^2 = \omega^2\, \mu\varepsilon_{10}$ che descrive *onde elettromagnetiche generalizzate*.

Nel caso generale, in cui $\sigma_e \neq 0$ chiameremo le onde date da (8) *magneto-luminose*, facendo l'osservazione che ormai il fronte d'onda di Alfvén è degenerato a causa dell'anisotropia della pressione, così che la sua velocità di propagazione sarà data dall'espressione $V_a^{2'} = V_a^2 + c_{\perp}^2 - c_{//}^2$.

oo) Infine, scegliendo l'alternative fornita dalla (IV.5), risulterà una equazione quadratica

$$(9)\qquad L\,(\omega^2 - 3\, c_{//}^2\, X^2) - \frac{i\omega}{c}\left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) 16\, \sigma\alpha_0\, T_0^3 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0}\right)_{S_0} X^2 = 0 ,$$

mentre dal resto del sistema (IV) si ricava: $\boldsymbol{v} = v_z\, \boldsymbol{k}$; $\mathbf{I} = 0$; $\boldsymbol{q}^{(R)} = q_z^{(R)}\, \boldsymbol{k}$, con v_z-arbitrario.

Ponendo $\alpha_0 = 0$, la relazione (9) si riduce alla $X^2 = \omega^2/3\, c_{//}^2$, descrivente la velocità di fase di un'*onda di tipo acustico generalizzato*.

Nel caso generale, quando $\alpha_0 \neq 0$, la formula (9) ci conduce ad *onde termoacustiche generalizzate*.

b) $X_3 = 0$.

Se la propagazione avviene nella direzione normale al campo magnetico $\mathbf{B}_0$, il sistema (III) si riduce al seguente

$$
\begin{aligned}
& M I_y = -\sigma_e B_0 (X^2 - \mu\, \varepsilon_{\perp 0}\, \omega^2)\, v_x \,, \\
& N I_z = 0 \quad ; \quad N \equiv X^2 + i\omega\mu\, (\sigma_e + i\omega\varepsilon_{//0}) \,, \\
& q_y^{(R)} = 0 \quad ; \quad v_y = 0 \quad ; \quad I_x = 0 \quad ; \quad v_z = (i\omega c \rho_0)^{-1} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) q_z^{(R)} , \\
\text{(V)} \quad & \left\{ A \left[\frac{3\, i\omega}{c} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) + X^2 \right] + 3\, \alpha_0\, i\omega \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) \right\} q_x^{(R)} + \\
& \qquad + 16\, \sigma\alpha_0 T_0^3 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0}\right)_{S_0} \rho_0 X^2 v_x = 0 \,, \\
& A c^{-1} q_x^{(R)} + \alpha_0\, q_z^{(R)} = 0 \,, \\
& (-\omega^2 + 2\, c_1^2 X^2)\, v_x + \frac{1}{\sigma_e B_0} (c_1^2 X^2 - \sigma_e\, i\mu\omega\, V_a^2)\, I_y - \\
& \qquad - \frac{i\omega}{c \rho_0} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) q_x^{(R)} = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Come risulta dalla (V.2) abbiamo due possibilità.

i) $N = X^2 + i\omega\mu\, (\sigma_e + i\omega\varepsilon_{//0}) = 0 \quad ; \quad I_z \neq 0$.

Siccome in questo caso, in generale, $M \neq 0$, dalla (V.1) si può trovare I_y e sostituire in (V.6) ciò che ci condurrà alla

$$
\text{(10)} \quad \left[(2\, c_1^2 X^2 - \omega^2) - \frac{1}{M} (c_1^2 X^2 - \sigma_e\, i\mu\omega\, V_a^2)(X^2 - \mu\varepsilon_{\perp 0}\, \omega^2) \right] v_x - \\
- \frac{i\omega}{c\rho_0} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) q_x^{(R)} = 0 \,.
$$

Posto $q_x^{(R)}$, dato da (10), nella (V.4), arriviamo alla seguente relazioni in v_x

$$
\text{(11)} \quad \left\langle \left\{ A \left[\frac{3\, i\omega}{c} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) + X^2 \right] + 3\, i\omega\alpha_0 \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) \right\} \left[(2\, c_1^2 X^2 - \omega^2) - \right. \right. \\
\left. - \frac{1}{M} (c_1^2 X^2 - \sigma_e\, i\mu\omega\, V_a^2)(X^2 - \mu\varepsilon_{\perp 0}\, \omega^2) \right] + \\
\left. + 16\, \sigma\alpha_0 T_0^3 \frac{i\omega}{c} \left(\alpha_0 + \frac{i\omega}{c}\right) X^2 \right\rangle v_x = 0 \,,
$$

Da qui, nell'ipotesi $N = 0$, risulta $v_x = 0 \rightarrow I_y = 0$, $q_x^{(R)} = 0$, $q_z^{(R)} = 0$, $v_z = 0$ e quindi avremo: $\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{q}^{(R)} = 0$, $\mathbf{I} = I_z \boldsymbol{k}$, dove I_z ha un valore arbitrario. La condizione $N = 0$ ci mostra che si tratta di *onde elettromagnetiche generalizzate smorzate*.

ii) $I_z = 0$; $N \neq 0$.

Assumendo come sopra $M \neq 0$, la (11) resta valevole e perciò, scegliendo $v_x \neq 0$, si trae

$$(12) \quad \left(X^2 - \frac{3\,\omega^2}{c^2}\right)\{(2\,c_1^2\,X^2 - \omega^2)\,M - (c_1^2\,X^2 - \sigma_e\,i\omega\mu\,V_a^2)(X^2 - \mu\varepsilon_{10}\,\omega^2)\} = 0,$$

dove abbiamo supposto anche $\alpha_0 = 0$.

Il sistema (V) avrà allora le soluzioni: $\boldsymbol{v} = v_x\,\boldsymbol{i} + v_z\,\boldsymbol{k}$; $\mathbf{I} = I_y\,\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{q}^{(R)} = q_x^{(R)}\,\boldsymbol{i} + q_z^{(R)}\,\boldsymbol{k}$, dove però v_x resta qualunque.

Per quanto riguarda la (12), l'annullamento del primo fattore ci conduce ad un *fronte d'onda radiativo* [3], avente la velocità di propagazione $\omega/X = \pm\, c/\sqrt{3}$, mentre l'annullamento del secondo fattore porge l'equazione biquadratica

$$c_1^2\,X^4 + [-\,\omega^2\,(1 + c_1^2\,\mu\varepsilon_{10}) + i\mu\omega\sigma_e\,(V_a^2 + 2\,c_1^2)]\,X^2 -$$
$$-\, i\mu\omega^3\,[\sigma_e + \varepsilon_{10}\,(i\omega + \sigma_e\,\mu V_a^2)] = 0\,.$$

Essa, se $\sigma_e = 0$ possiede le soluzioni: $X_1^2 = \omega^2/c_1^2$ (*onde acustiche generalizzate*) e $X_2^2 = \omega^2\,\mu\varepsilon_{10}$ (*onde elettromagnetiche generalizzate*).

Se invece $\sigma_e \to \infty$, si ha

$$X^2 = \omega^2\,\frac{1 + \mu\varepsilon_{10}\,V_a^2}{V_a^2 + 2\,c_1^2}\,,$$

da cui si vede che le *onde di Alfvén* sono modificate tanto per l'effetto di anisotropia del tensore delle pressioni quanto per l'anisotropia delle proprietà elettriche del plasma descritte dal carattere tensoriale della permittività elettrica ε.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. AGOSTINELLI (1973) - *Sulle superficie d'onda in un plasma elettricamente anisotropo*, «Atti dei Lincei», *54* (4) 597–603.

[2] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER e F. E. LOW (1956) - *The Boltzmann equation and the one fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions*, «Proc. Roy. Soc. London», *A 236*, 112–118.

[3] G. MATTEI (1974) - *Radiative magnetogasdynamics. Basic equations and non-linear wave propagation* «Boll. U.M.I.», *4* (10), 150–173.