Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marino Palleschi

Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica non singolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.4, p. 367–373.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_4_367_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Geometria algebrica. — *Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica non singolare* (*). Nota I di MARINO PALLESCHI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARCHIONNA.

SUMMARY. — In a complex projective space we consider a non-singular algebraic variety V_d of dimension $d \geq 2$. $|X|$ denotes a complete ample linear system on V_d and $X_{m_1}, X_{m_2}, \cdots, X_{m_q}$ denote $q \leq d-1$ non-singular hypersurfaces belonging to q positive multiples $|m_1 X|, \cdots, |m_q X|$ of the linear system $|X|$. We suppose every subvariety $V_{d-i} = \bigcap_{j=1}^{i} X_{m_j}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ is non singular and has a regular dimension $d - i$.

In this case the subvariety $V_{d-q} = \bigcap_{j=1}^{q} X_{m_j}$ is called a quasi-characteristic variety of index q of the system $|X|$.

A divisor A of V_d is said to be q-times of the first kind mod $|X|$ if for each relative integer l the complete linear system $|lX - A|$, belonging to V_d, cuts out a complete system on every quasi-characteristic variety V_{d-q} of the system $|X|$.

The above conditions can be reduced. In fact if for each l the complete system $|lX - A|$ cuts out a complete system on a fixed quasi-characteristic variety of index q of the system $|X|$, then the complete system $|lX - A|$ cuts out a complete system on any quasi-characteristic variety of index $p \leq q$ of the system $|X|$.

We denote with $H^q(V_d, \mathcal{O}(D))$ the q-th cohomology module of V_d with coefficients in the sheaf $\mathcal{O}(D)$ of germs of meromorphic functions which are multiples of the divisor $-D$.

With the previous notations, a characteristic condition for A to be q-times of the first kind mod $|X|$ is that $H^p(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0)$, for each integer $l, p = 1, 2, \cdots, q$.

A characteristic condition for A to be q-times of the first kind mod a suitable multiple of every ample linear system is that $H^p(V_d, \mathcal{O}(-A)) = (0)$, $(p = 1, 2, \cdots, q)$.

We recall that the theory of divisors of the first kind was introduced and developed with geometrical language and instruments by Marchionna (cfr. [6], [7]).

In this paper (and in the following Note II with the same title) we reconstruct the whole theory in an independent way, by employing cohomology theory.

1. Consideriamo una *varietà algebrica non singolare* V_d di dimensione $d \geq 2$, appartenente ad uno spazio proiettivo complesso.

Siano: D un divisore di V_d; $|X|$ un sistema lineare tracciato su V_d il quale sia *ampio* (nel senso di Kodaira, cfr. [3], p. 89); X una *generica* ipersuperficie *non singolare* estratta dal sistema $|X|$.

Denoteremo con $|D|$ il sistema lineare completo individuato da D su V_d, con $|D| \cdot X$ il sistema lineare – eventualmente incompleto – tagliato da $|D|$ su X, con $|D \cdot X|_X$ il sistema lineare completo individuato su X dal divisore $D \cdot X$, con K un divisore canonico di V_d.

Con $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{V_d}$ indicheremo il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su V_d, con $\mathcal{O}(D)$ il fascio dei germi delle funzioni meromorfe multiple del divi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'8 aprile 1978.

sore $-D$, con $\mathcal{O}_X(D\cdot X)$ l'analogo fascio su X individuato da un divisore della classe d'equivalenza lineare di $D\cdot X$.

Nel seguito occorrerà considerare la sequenza esatta di fasci

$$(1.1) \qquad 0 \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+X) \to \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X) \to 0$$

(cfr. [1], p. 294; [4] p. 874).

Utilizzeremo pure la corrispondente sequenza esatta di coomologia:

(1.2)

$$(0) \longrightarrow H^0(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_0} H^0(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_0} H^0(X, \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X)) \xrightarrow{h_0}$$

$$\xrightarrow{h_0} H^1(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_1} H^1(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_1} H^1(X, \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X)) \xrightarrow{h_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{h_{q-1}} H^q(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_q} H^q(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_q} H^q(X, \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X)) \xrightarrow{h_q}$$

$$\xrightarrow{h_q} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_{q+1}} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_{q+1}} H^{q+1}(X, \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X)) \xrightarrow{h_{q+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{h_{d-1}} H^d(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_d} H^d(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_d} (0).$$

Rammentiamo che il q-esimo modulo, $H^q(V_d, \mathcal{O}(D))$, della coomologia di V_d a coefficienti in $\mathcal{O}(D)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo complesso per ogni intero $q \geq 0$. Notoriamente i suddetti moduli risultano nulli per ogni $q > d$. Per tale motivo abbiamo troncato la sequenza (1.2) al posto $3d+4$ (cfr. [2] pp. 865, 868; [1] p. 291).

OSSERVAZIONE 1. È utile per il seguito ricordare due proposizioni che sono conseguenze immediate del Teorema di regolarità dell'aggiunto di Kodaira e Spencer e del Teorema di dualità di Serre.

Sia X *un'ipersuperficie non singolare estratta da un sistema lineare ampio tracciato su* V_d; *sia* D *un divisore di* V_d.

(i) *Esiste un intero* l_1 *tale che* $H^q(V_d, \mathcal{O}(lX-D)) = (0)$ *per ogni intero* $l \geq l_1, q \geq 1$.

(ii) *Esiste un intero* l_2 *tale che* $H^q(V_d, \mathcal{O}(lX-D)) = (0)$ *per ogni intero* $l \leq l_2, q \leq d-1$.

Infatti è noto che esiste un intero l_1 tale che, per ogni intero $l \geq l_1$, il sistema lineare $|lX-D-K|$ risulta ampio (cfr. [3] p. 90; [6] p. 325, nota (5) a piè di pagina). In virtù di un classico Teorema di Kodaira e Spencer (cfr. [4] p. 874) si ottiene immediatamente la (i).

Ora si applichi la proposizione (i) sostituendo il divisore D con $-D-K$. Osservando che per il Teorema di dualità di Serre (cfr. [8] p. 24) si ha l'isomorfismo $H^q(V_d, \mathcal{O}(lX+D+K)) \simeq H^{d-q}(V_d, \mathcal{O}(-lX-D))$, si ottiene subito la proposizione (ii).

Sia ora $|m_1 X|$ un multiplo positivo ($m_1 \geq 1$) del sistema ampio $|X|$. Anche il sistema lineare $|m_1 X|$ è ampio (cfr. [3] p.89). Sia X_{m_1} una generica ipersuperficie non singolare estratta da $|m_1 X|$; sia A un divisore di V_d. Sussiste il

LEMMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni intero relativo l si abbia*

$$H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0), \quad (1 \leq q \leq d-2, \; d \geq 3), \tag{1.3}$$

è che per ogni l risulti

$$H^q(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A)\cdot X_{m_1})) = (0). \tag{1.4}$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Consideriamo il seguente tratto della successione esatta (1.2),

$$H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{g_q} H^q(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A)\cdot X_{m_1})) \xrightarrow{h_q} \xrightarrow{h_q} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}((l - m_1)X - A)), \tag{1.5}$$

ottenuto sostituendo il divisore D con il divisore $(l - m_1)X - A$ e la ipersuperficie X con l'ipersuperficie $X_{m_1} \equiv m_1 X$.

Per ipotesi sussistono le (1.3) per ogni intero relativo l; pertanto l'esattezza della (1.5) implica il sussistere della (1.4) per ogni l.

La condizione è sufficiente. Consideriamo il seguente tratto della successione esatta (1.2)

$$H^q(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}(((l + m_1)X - A)\cdot X_{m_1})) \xrightarrow{h_q} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{f_{q+1}} \xrightarrow{f_{q+1}} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}((l + m_1)X - A)), \tag{1.6}$$

ottenuto sostituendo il divisore D con il divisore $lX - A$ e l'ipersurperficie X con X_{m_1}. Poiché la (1.4) ora sussiste, per ipotesi, per ogni intero relativo l, la (1.6) diventa

$$(0) \xrightarrow{h_q} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{f_{q+1}} H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}((l + m_1)X - A)). \tag{1.7}$$

Per la (i) dell'Osservazione 1 esiste un conveniente intero μ_1 tale che per ogni $l \geq \mu_1$ risulti

$$H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0). \tag{1.8}$$

Procediamo ora per induzione discendente supponendo che la (1.8) sussista per ogni $l \geq \bar{l}$ e verificandola per $l = \bar{l} - 1$. L'ipotesi induttiva implica il sussistere della (1.8) per $l = \bar{l} + m_1 - 1$; ossia

$$H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}((\bar{l} - 1 + m_1)X - A)) = (0).$$

Ponendo $l = \bar{l} - 1$ nella (1.7), dalla sua esattezza deduciamo

$$H^{q+1}(V_d, \mathcal{O}((\bar{l} - 1) X - A)) = (0);$$

pertanto la (1.8) sussiste per ogni intero relativo l.

Consideriamo ora il seguente tratto della successione esatta (1.2),

$$(1.9) \qquad H^q(V_d, \mathcal{O}((l - m_1) X - A)) \xrightarrow{f_q} H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{g_q}$$
$$\xrightarrow{g_q} H^q(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A) \cdot X_{m_1})),$$

ottenuto sostituendo il divisore D con il divisore $(l - m_1) X - A$ e la ipersuperficie X con la X_{m_1}. Tenendo conto della (1.4) sussistente, per ipotesi, per ogni l, la (1.9) diventa

$$(1.10) \qquad H^q(V_d, \mathcal{O}((l - m_1) X - A)) \xrightarrow{f_q} H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{g_q} (0).$$

Per la (ii) dell'Osservazione 1 esiste un opportuno intero μ_2 tale che per ogni $l \leq \mu_2$ sia

$$(1.11) \qquad H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0).$$

Procediamo ora con un ragionamento induttivo ascendente. Supponiamo, cioè, valida la (1.11) per ogni $l \leq \bar{l}$ e dimostriamola per $l = \bar{l} + 1$.

Per l'ipotesi induttiva la (1.11) sussiste, in particolare, con $l = \bar{l} + 1 - m_1$ ossia $H^q(V_d, \mathcal{O}((\bar{l} + 1 - m_1) X - A)) = (0)$.

Ponendo $l = \bar{l} + 1$ nella sequenza esatta (1.10) otteniamo

$$H^q(V_d, \mathcal{O}((\bar{l} + 1) X - A)) = (0).$$

Concludendo la (1.11) sussiste per ogni intero relativo l.

OSSERVAZIONE 3. Applicando consecutivamente il Lemma 2 per $q = 1, 2, \cdots, t$, $(t \leq d - 2)$, si ottiene subito il seguente risultato.

Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni intero relativo l si abbia

$$H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = H^2(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = \cdots$$
$$\cdots = H^{t+1}(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0), \qquad (1 \leq t \leq d - 2; d \geq 3),$$

è che per ogni l risulti

$$H^1(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A) \cdot X_{m_1})) = H^2(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A) \cdot X_{m_1})) = \cdots$$
$$\cdots = H^t(X_{m_1}, \mathcal{O}_{X_{m_1}}((lX - A) \cdot X_{m_1}) = (0).$$

2. Torniamo a considerare su V_d, $(d \geq 2)$, un divisore D, un'ipersuperficie non singolare X estratta da un sistema ampio $|X|$ e la sequenza esatta (1.2).

OSSERVAZIONE 4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema completo* $|D'| = |D + X|$, *tracciato su* V_d, *tagli su* X *un sistema lineare completo, è che l'omomorfismo* $f_1 : H^1(V_d, \mathcal{O}(D)) \to H^1(V_d, \mathcal{O}(D+X))$ – che figura nella (1.2) – *sia iniettivo*. Tenendo presente l'esattezza della (1.2), ciò equivale ad affermare che $\ker f_1 = \operatorname{Im} h_0 = (0)$. *Quest'ultima condizione è ovviamente soddisfatta qualora si abbia* $H^1(V_d, \mathcal{O}(D)) = (0)$.

Per verificare le proprietà dianzi enunciate osserviamo dapprima che dall'esattezza della (1.2) segue l'esattezza della successione

$$(2.1) \qquad (0) \longrightarrow H^0(V_d, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{f_0} H^0(V_d, \mathcal{O}(D+X)) \xrightarrow{g_0}$$
$$\xrightarrow{g_0} H^0(X, \mathcal{O}_X((D+X)\cdot X)) \xrightarrow{h_0} \operatorname{Im} h_0 \longrightarrow (0)\,.$$

Se ne deduce l'annullarsi della somma, a segni alterni, delle dimensioni degli spazi vettoriali ivi presenti; e poiché $\dim|D| + 1 = \dim H^0(V_d, \mathcal{O}(D))$, ecc. (cfr. [4] p. 873; [1] p. 294) abbiamo

$$(2.2) \qquad (\dim|D| + 1) - (\dim|D+X| + 1) +$$
$$+ (\dim|(D+X)\cdot X|_X + 1) - \dim \operatorname{Im} h_0 = 0\,.$$

Ciò posto ricordiamo la nota relazione

$$(2.3) \qquad \dim|D+X| = \dim|D| + \dim|D+X|\cdot X + 1$$

(cfr. [3] p. 114). Dalla (2.3) e dalla (2.2) segue

$$\dim|(D+X)\cdot X|_X - \dim|D+X|\cdot X = \dim \operatorname{Im} h_0\,.$$

Quest'ultima relazione fornisce la validità delle proprietà enunciate nella presente Osservazione 4.

Nota. Se il sistema lineare completo $|D+X|$ tracciato su V_d non è effettivo, a maggior ragione non è effettivo il sistema $|D+X|\cdot X$ tagliato su X. Orbene l'affermare che in tal caso il sistema $|D+X|\cdot X$ è completo equivale ad affermare che pure il sistema $|(D+X)\cdot X|_X$ non è effettivo.

TEOREMA 5. *Sia* X_{m_1} *un'ipersuperficie non singolare, generica ma fissata, estratta da un multiplo positivo* $|m_1 X|$ *di un sistema lineare ampio* $|X|$ *tracciato su* V_d, $(d \geq 2)$. *Se per ogni intero relativo* l *il sistema lineare completo* $|lX - A|$ *della varietà* V_d *taglia sopra* X_{m_1} *un sistema completo, allora risulta per ogni* l

$$(2.4) \qquad H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza esatta (1.2) ove si sia sostituito D con il divisore $lX - A$ e l'ipersuperficie X con X_{m_1}.

Da essa deduciamo l'esattezza della successione

$$\operatorname{Im} h_0 \xhookrightarrow{i} H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{f_1} H^1(V_d, \mathcal{O}((l+m_1)X - A))$$

ove i è l'applicazione di inclusione. L'ipotesi attuale, in virtù dell'Osservazione 4, implica $\operatorname{Im} h_0 = (0)$; pertanto è esatta la sequenza

$$(2.5) \qquad (0) \longrightarrow H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) \xrightarrow{f_1} H^1(V_d, \mathcal{O}((l + m_1) X - A)) .$$

Già sappiamo, per la (i) dell'Osservazione 1, che $H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0)$ per $l \geq \nu_1$, ν_1 opportuno. Supponiamo, pertanto, valida la (2.4) per $l \geq \bar{l}$ e verifichiamola per $l = \bar{l} - 1$. Ponendo $l = \bar{l} - 1$ nella (2.5) e notando che la ipotesi induttiva sussiste, in particolare, per $l = \bar{l} + m_1 - 1$, otteniamo $H^1(V_d, \mathcal{O}((\bar{l} - 1) X - A)) = (0)$. Di qui la tesi.

3. Sulla varietà non singolare V_d, $(d \geq 2)$, consideriamo ancora un divisore A, un multiplo positivo $|m_1 X|$ di un sistema lineare ampio $|X|$ ed una *generica* ipersuperficie non singolare X_{m_1} estratta dal sistema $|m_1 X|$.

D'accordo con Marchionna (cfr. [7]) diciamo che A *è un divisore di prima specie* (modulo $|X|$) *se per ogni intero relativo l e per ogni intero positivo m_1, il sistema lineare* COMPLETO $|lX - A|$ *tracciato su V_d taglia un sistema lineare* COMPLETO *sopra una qualunque X_{m_1}* (1).

Intendiamo analizzare la precedente definizione in termini coomologici; sussiste in proposito il seguente

TEOREMA 6. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un divisore* A *di V_d, $(d \geq 2)$, sia di prima specie* (modulo $|X|$) *è che per ogni intero relativo l risulti*

$$(3.1) \qquad H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0) .$$

Dimostrazione. La condizione necessaria segue dal Teorema 5.

Per verificare la condizione sufficiente consideriamo un'arbitraria ipersuperficie non singolare X_{m_1} estratta dal sistema $|m_1 X|$ con $m_1 \geq 1$ generico. Applichiamo l'Osservazione 4 sostituendo il divisore D col divisore $lX - A$ e l'ipersuperficie X con X_{m_1}. Poiché la (3.1) attualmente è supposta valida per ogni l, posto $l' = l + m_1$, possiamo affermare che il sistema lineare completo $|l' X - A| = |(lX - A) + X_{m_1}|$ taglia un sistema completo su X_{m_1} per ogni l e, quindi, per ogni intero relativo l'.

OSSERVAZIONE 7. Le condizioni espresse dalla definizione di divisore di prima specie sono sovrabbondanti. Infatti *se per ogni intero relativo l il sistema lineare* COMPLETO $|lX - A|$ *taglia un sistema* COMPLETO *sopra una fissata ipersuperficie non singolare X_{m_1}, estratta da un prescelto multiplo $|m_1 X|$ del sistema ampio $|X|$, allora* A *è di prima specie* (modulo $|X|$), ossia per

(1) Occorre osservare che la nozione di divisore di prima specie data implicitamente da Marchionna in [6] è leggermente differente da quella che egli stesso adotterà in [7] perché più adatta ad affrontare le questioni, ivi trattate, legate alle varietà di prima specie secondo Dubreil. Qui abbiamo riportato la seconda definizione.

ogni l il sistema *completo* $|lX - A|$ tracciato su V_d taglia un sistema *completo* sopra una qualunque ipersuperficie non singolare di ogni multiplo positivo di $|X|$.

Infatti dall'ipotesi posta si deduce $H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0)$ per ogni l (Teorema 5). Pertanto il divisore A è di prima specie (modulo $|X|$) in virtù del Teorema 6.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. V. D. HODGE (1955) – *A note on the Riemann-Roch Theorem*, « Journal London Math. Soc. », *30*, 291–296.

[2] K. KODAIRA (1953) – *On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. », *39*, 865–868.

[3] K. KODAIRA (1954) – *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Math. », *59*, 86–133.

[4] K. KODAIRA e D. C. SPENCER (1953) – *Divisor class groups on algebraic varieties*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. ». *39*. 872–877.

[5] E. MARCHIONNA (1961) – *Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare*, « Annali di Matem. ». ser. IV, *54*, 159–199.

[6] E. MARCHIONNA (1962) – *Sui multipli dei sistemi lineari d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica pluriregolare*, « Rendiconti di Matematica », (3–4), *21*, 322–353.

[7] E. MARCHIONNA (1971) – *Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica*, « Symposia Mathematica » (Ist. Naz. Alta Matematica), vol. V, Academic Press, 439–456.

[8] J. P. SERRE (1955) – *Un théorème de dualité*, « Comment. Math. Helv. », *29*, 9–26.

[9] J. P. SERRE (1955) – *Faisceaux algébriques cohérents*, « Annals of Mathem. », *61*, 197–278.