Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Eraldo Giuli, Alberto Tognoli

Proprietà topologiche e topologie iniziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 163–169.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_163_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Topologia. — *Proprietà topologiche e topologie iniziali* (*). Nota di
ERALDO GIULI e ALBERTO TOGNOLI, presentata (**) dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — Let X be a set, a topology τ on X is completely regular if, and only if, τ is the topology defined by a family of maps $\{f_\lambda : X \to \mathbf{R}\}$. It is not difficult to prove that in some sense $\mathbf{R}$ is minimal under this condition. The purpose of this paper is to characterize the spaces of values Y that are minimal and the families of topologies on X that are complete under the property of being induced by a family of maps $\{f_\lambda : X \to Y\}$.

INTRODUZIONE

Uno spazio topologico X è completamente regolare se e solo se la sua topologia è quella iniziale individuata da una famiglia di funzioni da X alla retta numerica **R**. Non è difficile provare che in un certo senso **R** è uno spazio dei valori minimo per questa proprietà.

Il proposito di questo lavoro è quello di caratterizzare le classi $\mathscr{C}$ di spazi topologici (sottocategorie debolmente iniziali) tali che, per ogni fissata cardinalità Λ esiste uno spazio dei valori Y_Λ per gli spazi di $\mathscr{C}$ di cardinalità non superiore a Λ e di trovare le classi $\{Y_\Lambda\}$ minime per questa proprietà (basi).

Vengono anche messe in luce le relazioni intercorrenti tra le sottocategorie debolmente iniziali sia con le classi di spazi Y–regolari nel senso di Engelking e Mrówka [3] sia con le sottocategorie epi–riflessive di spazi topologici [6], [7].

1. IL FUNTORE DELLE TOPOLOGIE INIZIALI

ENS indica la categoria degli insiemi e loro applicazioni, TOP indica la categoria degli spazi topologici e applicazioni continue, $D : \mathrm{TOP} \to \mathrm{ENS}$ indica il funtore che dimentica la struttura topologica. Se $X \in \mathrm{TOP}$ la sua topologia viene indicata con τ_X; se $f \in \mathrm{ENS}(DX, DY)$ dire che essa è continua significa che essa lo è come applicazione da X a Y.

La terminologia usata per le categorie è quella di [8].

Le proprietà delle topologie iniziali riportate nel seguito sono, alcune ben note (vedi per esempio [2], Par. 3 o [11] Par. 8) ed altre semplici conseguenze delle prime e la loro dimostrazione viene riportata per completezza.

Siano $A \in \mathrm{ENS}$, $Y \in \mathrm{TOP}$ e $\varnothing \neq H \subset \mathrm{ENS}(A, DY)$; dicesi *topologia iniziale* individuata da H in A, e viene nel seguito indicata con $i_Y H$ o, quando

(*) Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

ciò non dia luogo ad equivoci con iH, la meno fine topologia in A per la quale risultano continue le applicazioni $h \in \mathrm{H}$; una sottobase per iH è dunque data dalle parti del tipo $h^{-1}\mathrm{U}$, $h \in \mathrm{H}$, $\mathrm{U} \in \tau_{\mathrm{Y}}$.

Siano X, Y $\in$ TOP; diciamo che X è uno spazio Y-*iniziale* se risulta $\tau_{\mathrm{X}} = i\mathrm{H}$ per qualche $\mathrm{H} \subset \mathrm{ENS}(\mathrm{DX}, \mathrm{DY})$; è chiaro che in tal caso risulta $\mathrm{H} \subset \mathrm{TOP}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ e $i\mathrm{H} = i(\mathrm{D}(\mathrm{TOP}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$.

LEMMA 1.1. *Siano* T, X, Y $\in$ TOP, X *uno spazio* Y-*iniziale mediante* $\mathrm{H} \subset \mathrm{ENS}(\mathrm{DX}, \mathrm{DY})$ *e* $f \in \mathrm{ENS}(\mathrm{DT}, \mathrm{DX})$;

a) *la continuità di* f *implica la continuità, per ogni* $h \in \mathrm{H}$, *di* hf;

b) *la continuità, per ogni* $h \in \mathrm{H}$, *di* hf *implica la continuità di* f.

LEMMA 1.2. *Siano* X, Y $\in$ TOP, $\mathrm{H} = \{h_j : \mathrm{DX} \to \mathrm{DY}\}_{j \in \mathrm{J}}$ *e* $\{\mathrm{H}\} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}^{\mathrm{J}}$ (Y^{J} *prodotto topologico di* J *copie di* Y) *il prodotto in arrivo della famiglia* H; *risulta* $i\mathrm{H} = i(\{\mathrm{H}\})$.

LEMMA 1.3. *Siano* T, X, Y $\in$ TOP; *se* T *è* X-*iniziale e* X *è* Y-*iniziale allora* T *è* Y-*iniziale*.

Sia $f \in \mathrm{TOP}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$; se la f è iniettiva e la topologia di T è quella iniziale individuata da f diciamo che la f è una immersione e che T (o meglio (T, f)) è un sottospazio di X (in altre parole le immersioni sono i monomorfismi estremali [6]). Dalla definizione di sottospazio e dal Lemma 1.3 segue la seguente

PROPOSIZIONE 1.1. *L'essere* Y-*iniziale è una proprietà ereditaria* (*ossia che si conserva per sottospazi*); *in particolare è una proprietà topologica*.

Sia $\mathrm{X} = \bigtimes_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{X}_j$ il prodotto topologico di una famiglia (non vuota) $\{\mathrm{X}_j\}_{j \in \mathrm{J}}$ di spazi topologici (non vuoti); dall'osservazione che ogni X_j può essere riguardato come un sottospazio di X, e che X ha la topologia iniziale individuata dalle proiezioni coordinate e servendosi del Lemma 1.3 si ottiene la seguente

PROPOSIZIONE 1.2. *a*) *Se* $\mathrm{X} = \bigtimes_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{X}_j$ *è* Y-*iniziale tale è ogni suo fattore* X_j:

b) *Se ogni* X_j *è* Y-*iniziale tale è* X.

Dalle precedenti osservazioni si deduce anche la seguente

PROPOSIZIONE 1.3. *Uno spazio topologico* X *è* Y-*iniziale se e solo se per ogni insieme* $\mathrm{J} \neq \emptyset$ *si ha che* X *è* Y^{J}-*iniziale*.

Per ogni Y $\in$ TOP indichiamo con $\mathscr{M}_{\mathrm{Y}}$ la categoria che ha per oggetti le coppie (A, H) con $\mathrm{A} \in \mathrm{ENS}$ e $\emptyset \neq \mathrm{H} \subset \mathrm{ENS}(\mathrm{A}, \mathrm{DY})$ e che ha per morfismi da (A, H) a (B, K) le $f \in \mathrm{ENS}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ tali che, per ogni $k \in \mathrm{K}$, risulta $kf \in \mathrm{H}$; dicesi *funtore delle topologie iniziali* individuato dallo spazio topologico Y il funtore $\mathrm{I}_{\mathrm{Y}} : \mathscr{M}_{\mathrm{Y}} \to \mathrm{TOP}$ che ad ogni $(\mathrm{A}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_{\mathrm{Y}}$ associa lo spazio topologico $(\mathrm{A}; i_{\mathrm{Y}}\mathrm{H})$ e che ad ogni $f : (\mathrm{A}, \mathrm{H}) \to (\mathrm{B}, \mathrm{K})$ associa la stessa f come funzione continua (per il Lemma 1.1. *b*) da $(\mathrm{A}; i\mathrm{H})$ a $(\mathrm{B}; i\mathrm{K})$.

Sia ora $F_Y : TOP \to \mathcal{M}_Y$ il funtore definito sugli oggetti $X \in TOP$ da $F_Y X = (DX, D(TOP(X, Y))$; la proprietà caratteristica del funtore delle topologie iniziali è espressa dal seguente

TEOREMA 1.1. *Il funtore* I_Y *è un aggiunto destro del funtore* F_Y.

Dimostrazione. Sia, per ogni $X \in TOP$ e $(A, H) \in \mathcal{M}_Y$, $\eta : TOP(X, I_Y(A, H)) \to \mathcal{M}_Y(F_Y X, (A, H))$ l'applicazione che ad ogni $f \in TOP(X, I_Y(A, H))$ associa la stessa f come morfismo (per il Lemma 1.1 *a*) da $F_Y X$ ad (A, H); l'iniettività di η è ovvia e la sua sujettività segue dal Lemma 1.1. *b*.

2. SOTTOCATEGORIE (DEBOLMENTE) INIZIALI

Le sottocategorie $\mathscr{C} \subset TOP$ considerate nel seguito sono tutte piene ($\mathscr{C}(X, Y) = TOP(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathscr{C}$) e ripetitive ($\mathscr{C}$ contiene gli spazi topologici omeomorfi ad uno qualsiasi che vi appartiene). Dunque tali sottocategorie sono sinonimo di proprietà topologica.

Per ogni sottocategoria $\mathscr{C} \subset TOP$ e cardinalità Λ, $\mathscr{C}(\Lambda)$ indica la sottocategoria costituita dagli oggetti di $\mathscr{C}$ di cardinalità non superiore a Λ; per ogni $Y \in TOP$, IN_Y indica la sottocategoria piena (e ripetitiva per la Proposizione 1.1) degli spazi Y–iniziali.

Ciò premesso diciamo che una sottocategoria $\mathscr{C}$ di una sottocategoria $\mathscr{B} \subset TOP$ è *debolmente iniziale* in $\mathscr{B}$ se per ogni fissata cardinalità Λ esiste uno spazio topologico Y (detto *spazio dei valori* per $\mathscr{C}$ relativo alla cardinalità Λ) tale che risulta $\mathscr{C}(\Lambda) = IN_Y(\Lambda) \cap \mathscr{B}$; diciamo poi che $\mathscr{C}$ è una *sottocategoria iniziale* se esiste uno spazio dei valori indipendente dalla cardinalità.

Sia TOP_0 la categoria degli spazi soddisfacenti il postulato T_0; si ha la seguente caratterizzazione delle sottocategorie debolmente complete di TOP_0.

TEOREMA 2.1. $\mathscr{C}$ *è debolmente iniziale in* TOP_0 *se e solo se è chiusa rispetto ai prodotti topologici e rispetto ai sottospazi.*

Dimostrazione. Siano $\mathscr{C} \subset TOP_0$ debolmente iniziale, $\{Y_\Lambda\}$ una classe di spazi dei valori per $\mathscr{C}$, $X = \bigtimes_{j \in J} X_j$ il prodotto topologico di una famiglia (non vuota) di spazi (non vuoti) appartenenti a $\mathscr{C}$ e card $X = \overline{\Lambda}$; ogni X_j è $Y_{\overline{\Lambda}}$–iniziale per essere, per ogni $j \in J$, card $X_j \leq \overline{\Lambda}$ e dunque, per la Proposizione 1.2 *b*, X è $Y_{\overline{\Lambda}}$–iniziale ed essendo anche T_0 appartiene a $\mathscr{C}$; se poi X′ è un sottospazio di $X \in \mathscr{C}$, X′ (è T_0) e $Y_{\text{card } X}$–iniziale per la Proposizione 1.1 e quindi appartiene a $\mathscr{C}$.

Viceversa siano $\mathscr{C} \subset TOP_0$ una sottocategoria chiusa rispetto ai prodotti topologici ed ai sottospazi, Λ una fissata cardinalità e $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(\Lambda)$ una qualunque classe di spazi a due a due non omeomorfi e tale che ogni spazio di $\mathscr{C}(\Lambda)$ è omeomorfo a uno di $\mathscr{D}$; la classe $\mathscr{D}$ è un insieme il cui prodotto topologico Y appartiene a $\mathscr{C}$; ora ogni $X \in \mathscr{D}$ è Y–iniziale e quindi, per l'ipotesi su $\mathscr{D}$ e per la Proposizione 1.1 anche ogni spazio appartenente a $\mathscr{C}(\Lambda)$ è Y–iniziale.

D'altronde se $T \in TOP_0$ è Y–iniziale mediante $H \subset ENS(DT, DY)$ risulta, per il Lemma 1.2, $\tau_T = i(\{H\})$ e la $\{H\} : T \to Y^H$, per essere T uno spazio T_0, è iniettiva; dunque T per essere un sottospazio di Y^H appartiene a $\mathscr{C}$.

Un risultato analogo a quello del Teorema 2.1 riguardante le sottocategorie di TOP si ottiene servendosi delle seguenti osservazioni: per ogni $X \in TOP$ indichiamo con rX il quoziente di X modulo la relazione $x_1 \sim x_2$ se ogni aperto che contiene uno dei due contiene l'altro. Si riconosce immediatamente che rX è uno spazio T_0, che l'applicazione di passaggio al quoziente $q : X \to rX$ è aperta e che (quindi) rX può essere riguardato come sottospazio di X mediante una qualunque sezione di q. Dalle precedenti considerazioni e dalla Proposizione 1.1 seguono allora le seguenti

PROPOSIZIONE 2.1. *X è uno spazio Y–iniziale se e solo se lo è* rX.

PROPOSIZIONE 2.2. *X è Y–iniziale se e solo se è* (rY)*–iniziale.*

La relazione tra le sottocategorie debolmente iniziali di TOP e TOP_0 è messa in luce dal seguente

TEOREMA 2.2. $\mathscr{C} \subset TOP$ *è debolmente iniziale (in* TOP*) se e solo se*

a) $\mathscr{C} \cap TOP_0$ *è debolmente inziale in* TOP_0

b) $\mathscr{C}$ *contiene ogni spazio* X *tale che* $rX \in \mathscr{C}$.

Dimostrazione. Se $\mathscr{C} \subset TOP$ è debolmente iniziale essa soddisfa *b)* per la Proposizione 2.1; con ragionamento analogo a quello fatto nella prima parte della dimostrazione del Teorema 2.1 si riconosce poi che $\mathscr{C} \cap TOP_0$ è debolmente iniziale in TOP_0.

Viceversa se $\mathscr{C} \cap TOP_0$ è debolmente iniziale in TOP_0 ogni sua classe di spazi dei valori è anche, per la proprietà *b)* e per la Proposizione 2.1, una classe di spazi dei valori per $\mathscr{C} \subset TOP$.

Dall'osservazione che (il funtore) r è permutabile con i prodotti topologici e dai Teoremi 2.1 e 2.2 segue il seguente

TEOREMA 2.3. $\mathscr{C} \subset TOP$ *è debolmente iniziale in* TOP *se e solo se*:

a') *è chiusa rispetto ai prodotti topologici ed ai sottospazi*;

b') *contiene ogni spazio* X *tale che* $rX \in \mathscr{C}$.

OSSERVAZIONE 2.1. Se Y è uno spazio T_0 la classe (sottocategoria) degli spazi Y–completamente regolari nel senso di S. Mrowka [10] coincide con la sottocategoria iniziale in TOP_0 degli spazi Y–iniziali e T_0; più in generale se $\mathscr{E} = \{Y_\lambda\}$ è una classe di spazi dei valori per una sottocategoria debolmente iniziale $\mathscr{C} \subset TOP$ e tutti gli Y sono T_0 la classe degli spazi $\mathscr{E}$–completamente regolari nel senso di H. Herrlich [5] coincide con la sottocategoria debolmente iniziale (in TOP_0) $\mathscr{C} \cap TOP_0$.

OSSERVAZIONE 2.2. J. F. Kennison [7] ha provato che le sottocategorie epiriflessive di TOP sono tutte e sole quelle chiuse rispetto ai prodotti topologici ed ai sottospazi. Da tale risultato e dal Teorema 2.3 si deduce che una sottocategoria di TOP è debolmente iniziale se e solo se è epi–riflessiva e soddisfa b').

S. Baron [1] ha dato una caratterizzazione analoga a quella di J. F. Kennison per le categorie epi–riflessive in TOP_0. Da tale caratterizzazione si deduce che ogni sottocategoria debolmente iniziale in TOP_0 è epi–riflessiva.

3. SISTEMI DI GENERATORI E BASI

Sia $\mathscr{C} \subset \mathrm{TOP}$ una sottocategoria debolmente completa; *diciamo classe di generatori* per $\mathscr{C}$ ogni sua classe di spazi dei valori; diciamo poi che $\mathscr{C}$ è *semplicemente generata* se esiste un sistema di generatori che (a meno di omeomorfismi) è un insieme.

Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. $\mathscr{C} \subset \mathrm{TOP}$ *è semplicemente generata se e solo se è iniziale.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{C} \subset \mathrm{TOP}$ è semplicemente generata dalla famiglia di generatori $\{Y_j\}_{j\in J}$ posto $Y = \bigtimes_{j\in J} Y_j$ si ha, per ogni $X \in \mathscr{C}$, che X è Y_j–iniziale per qualche $j \in J$ e quindi che X è Y–iniziale. Viceversa se $Z \in \mathrm{TOP}$ è Y–iniziale, per essere $Y \in \mathscr{C}$ (Teorema 2.3. a') e quindi Y_j–iniziale per qualche $j \in J$, si ha (Lemma 1.3) che Z è Y_j–iniziale e dunque appartiene a $\mathscr{C}$.

Siano $\{Y_\Lambda\}$, $\{Y'_\Lambda\}$ due classi di generatori per una fissata sottocategoria debolmente completa $\mathscr{C} \subset \mathrm{TOP}$; poniamo $\{Y_\Lambda\} \leq \{Y'_\Lambda\}$ se, per ogni Λ , Y_Λ è (omeomorfo *a*) un sottospazio di Y'_Λ. Tale relazione è ovviamente riflessiva e transitiva; ogni primo elemento rispetto a $\leq$ è detto Λ*–base* per $\mathscr{C}$.

Se $\mathscr{C}$ è semplicemente generata e Y , Y′ sono due generatori posto, nello stesso modo, $Y \leq Y'$ se Y è (omeomorfo ad) un sottospazio di Y′, ogni primo elemento prende il nome di *base* per $\mathscr{C}$.

Si osservi che se Y è una base per una sottocategoria iniziale non è detto che la classe costante $\{Y_\Lambda\}$, $Y_\Lambda = Y$, sia una Λ–base per $\mathscr{C}$ (vedi Esempio 6). Si osservi anche che per la Proposizione 2.2 le Λ–basi sono sempre costituite da spazi T_0.

4. ESEMPI

Diamo ora alcuni esempi illustrativi della teoria sviluppata. In tali esempi si ritrovano alcuni risultati dovuti a Herrlich [4] e [5], Mrówka [9] e che sono riportati in [10].

Nel seguito data una sottocategoria $\mathscr{C} \subset \mathrm{TOP}$, $\tilde{\mathscr{C}}$ indica la sottocategoria degli spazi X tali che $rX \in \mathscr{C}$. TOP_i $(i = 0 , 1 , 2 , 3)$ indica la sottocategoria degli spazi soddisfacenti il postulato T_i.

Esempio 1. La sottocategoria degli spazi caotici (gli unici aperti sono quelli banali) è iniziale:

a) i generatori sono gli spazi caotici;

b) le basi sono gli spazi puntiformi;

Esempio 2. La sottocategoria degli spazi aventi una sottobase di aperti che sono anche chiusi è iniziale:

a) i generatori sono gli spazi Y tali che rY è discreto e contiene più di un punto;

b) le basi sono gli spazi discreti con due punti.

Esempio 3. La categoria TOP $= \widetilde{\mathrm{TOP}}_0$ è iniziale:

a) i generatori sono gli spazi contenenti un sottospazio omeomorfo allo spazio S di Sierpinski (due punti con uno dei due unico aperto proprio);

b) le basi sono gli spazi omeomorfi allo spazio di Sierpinski.

Esempio 4. La categoria $\widetilde{\mathrm{TOP}}_1$ è debolmente iniziale ma non iniziale (Mrówka):

a) i sistemi di generatori sono le classi $\{\mathrm{Y}_\Lambda\}$ soddisfacenti le seguenti condizioni: 1) per ogni $\Lambda, r\mathrm{Y}_\Lambda$ è T_1; 2) per ogni Λ, Y_Λ contiene un sottospazio avente cardinalità Λ e topologia cofinita (i chiusi non banali sono le parti finite);

b) le Λ–basi sono date dalle classi di spazi che, per ogni cardinalità Λ, hanno quella cardinalità e topologia cofinita.

Esempio 5. La categoria $\widetilde{\mathrm{TOP}}_2$ è debolmente iniziale ma non iniziale (Herrlich).

Una classe di generatori si può costruire seguendo la seconda parte della dimostrazione del Teorema 2.1.

Lo stesso discorso vale per la categoria $\widetilde{\mathrm{TOP}}_3$.

Esempio 6. La categoria $\widetilde{\mathrm{TYCH}}$ degli spazi completamente regolari è iniziale:

a) un generatore è un qualunque spazio X tale che rX è T_2 e contiene (a meno di omeomorfismi) la retta numerica **R** (Mrówka);

b) una base è un qualunque spazio T_2 contenente la retta numerica **R** ma non ivi contenuto;

c) una Λ–base è data da una classe $\{\mathrm{Y}_\Lambda\}$ di spazi cosiffatta: $\mathrm{Y}_\Lambda =$ spazio puntiforme per $\Lambda = 1$; $\mathrm{Y}_\Lambda =$ spazio discreto con due punti per ogni cardinalità finita $\Lambda > 1$; $\mathrm{Y}_\Lambda = \left(\bigcup_{n \in \mathrm{N}} \{1/n\} \cup \{0\}\right)$, con la topologia di **R**, per $\Lambda =$ cardinalità del numerabile; $\mathrm{Y}_\Lambda = \mathbf{R}$ per ogni altra cardinalità.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. BARON (1968) – *Note on epi in* T_0, «Can. Math. Bull.», *11*, 503–504.
[2] N. BOURBAKI (1965) – *Topologie Générale*, II Ch. 1, Hermann (Paris).
[3] R. ENGELKING e S. MRÓWKA (1958) – *On* E-*compact spaces*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», *6*, 429–436.
[4] H. HERRLICH (1965) – *Wann sind alle stetigen Abbildungen in* Y *konstant?* «Math. Z.», *90*, 152–154.
[5] H. HERRLICH (1967) – E-*kompakte Räume*, «Mat. Z.», *96*, 228–255.
[6] H. HERRLICH (1971) – *Categorical Topology*, «Gen. Top. Appl.», *1*, 1–15.
[7] J. F. KENNISON (1965) – *Reflective functors in general topology and elsewhere*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *118*, 303–315.
[8] B. MITCHELL (1965) – *Theory of categories*, Academic Press.
[9] S. MRÓWKA (1956) – *On universal spaces*, «Bull. Acad. Polon. Sci.», *4*, 479–481.
[10] S. MRÓWKA (1968) – *Further results on* E-*compact spaces*, «Acta Math.», *120*, 161–185.
[11] S. WILLARD (1970) – *General topology*, Addison-Wesley (Reading).