Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabrizio Cacciafesta

Una questione di curvatura nelle varietà kähleriane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 152–156.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_152_0>

Geometria differenziale. — *Una questione di curvatura nelle varietà kähleriane* (*). Nota di FABRIZIO CACCIAFESTA, presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — The geodesic curvature for an analytic complex curve, as formally defined by Schouten and van Dantzig, is shown substantially to coincide with the notion of curvature for the invariant surfaces of a kählerian manifold, geometrically defined by Martinelli.

1. Lo studio della geometria differenziale nel campo complesso ha portato, di volta in volta, a privilegiare l'uno o l'altro di due diversi punti di vista: a seconda che gli enti esaminati si considerino nella loro natura complessa, o si preferisca invece considerare le loro immagini reali.

Così, una varietà complessa $\mathcal{V}_n$ di dimensione complessa n può trattarsi come una (particolare) varietà reale V_{2n}, di dimensione reale doppia. Connessioni, strutture metriche e sottovarietà dell'una e dell'altra si corrispondono secondo relazioni ben note: le curve analitiche complesse di $\mathcal{V}_n$, in particolare, hanno per immagini reali superfici di V_{2n} che ricevono il nome di *superfici caratteristiche.*

In questa Nota, vengono confrontate tra loro le nozioni di curvatura proposte, nei due punti di vista citati, da Schouten e van Dantzig per le curve complesse, e da Martinelli per le superfici caratteristiche, nel caso particolare che la varietà V_{2n} sia supposta kähleriana (ossia, brevemente, dotata di connessione di Levi-Civita relativa ad una metrica hermitiana). Si dimostra che tali definizioni, la prima più formale, la seconda più geometricamente motivata, conducono in effetti, a meno d'un fattore numerico, allo stesso risultato.

2. Sia V_{2n} una varietà reale dotata di struttura quasi complessa [(1)]; φ il tensore che definisce tale struttura. Rispetto ad un sistema di coordinate locali (x^h) $(h = 1, \cdots, 2n)$ su V_{2n}, ed ai campi-base naturali ad esso associati, φ avrà componenti (φ_i^h) soddisfacenti le relazioni fondamentali:

$$\varphi_k^h \, \varphi_i^k = - \delta_i^h .$$

Se $v \in T_p(V_{2n})$ è un qualunque vettore tangente alla varietà, il sottospazio di $T_p(V_{2n})$ generato da v e dal suo *coniugato* $\tilde{v} = \varphi(v)$ è una *faccetta caratteristica* in p.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca del CNR «Strutture algebriche e geometriche».

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

(1) Per le generalità sulle varietà quasi complesse e complesse, cfr. ad esempio S. Kobayashi e K. Nomizu [1], E. Martinelli [3].

Supporremo, di più, che V_{2n} possegga addirittura una struttura complessa; essa può allora riguardarsi come l'immagine reale d'una varietà complessa $\mathcal{V}_n$, di dimensione complessa n, e può farsi uso – su di essa – delle coordinate complesse $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\alpha+n}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ [2]. Particolarmente comodo, per le semplificazioni formali che comporta, riesce – com'è noto – l'uso del sistema sovrabbondante delle *coordinate isotrope* (z^α, z^{α^*}), e dei riferimenti e coriferimenti da queste determinati. Esso corrisponde, concettualmente, a considerare $V_{2n} = \mathcal{V}_n$ come sottovarietà d'una varietà complessa $\mathcal{V}_{2n}$, entro cui essa sia rappresentata dalle equazioni: $z^{\alpha^*} = \overline{z^\alpha}$.

Rispetto ad un riferimento isotropo, il vettore complesso $\boldsymbol{w} = (w^\alpha)$, tangente in p a $\mathcal{V}_n$, ha per immagine reale l'elemento di $T_p(V_{2n})$ di coordinate $(w^\alpha, w^{\alpha^*} = \overline{w^\alpha})$; mentre il vettore coniugato del vettore di coordinate (v^α, v^{α^*}) risulta avere coordinate $(iv^\alpha, -iv^{\alpha^*})$.

Una *superficie caratteristica* di V_{2n} è l'immagine reale d'una curva complessa di $\mathcal{V}_n$.

3. Supponiamo ora che sia data, in V_{2n}, una *metrica hermitiana*; ossia una metrica riemanniana (definita positiva) scriventesi in forma hermitiana in un coriferimento isotropo:

$$ds^2 = 2\, g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, dz^{\beta^*} \qquad (g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} = \overline{g_{\beta\alpha^*}}) \,. \tag{3.1}$$

Consideriamo la connessione di Levi-Civita determinata da questa metrica: se accade che il tensore φ della struttura quasi complessa risulti covariantemente costante rispetto a questa connessione, V_{2n} è detta – com'è noto – *varietà kähleriana.*

Per una varietà kähleriana, le sole componenti (isotrope) della connessione non necessariamente nulle sono quelle del tipo: $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $\Gamma^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*}$, che risultano date da:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\rho^*} \frac{\partial g_{\beta\rho^*}}{\partial z^\gamma} \qquad \text{(c.c.)} \,. \tag{3.2}$$

Avvertiamo che i coefficienti della metrica (e quindi le altre grandezze espresse tramite questi) sono supposti essere *semianalitici*: ossia, funzioni analitiche delle $2\,n$ variabili *indipendenti* (z^α, z^{α^*}). Invero, la condizione di essere funzioni analitiche delle sole (z^α), o delle sole (z^{α^*}), non sarebbe invariante per trasformazioni analitiche di coordinate su $\mathcal{V}_n$.

4. Consideriamo dunque una V_{2n} kähleriana come immagine reale d'una varietà complessa $\mathcal{V}_n$, e sia γ:

$$z^\alpha = z^\alpha(\tau) \tag{4.1}$$

(2) Per tutta la presente Nota, gl'indici greci saranno sistematicamente intesi variare da 1 ad n.

(z^α funzioni analitiche della variabile complessa τ) una curva complessa entro $\mathcal{V}_n$. Posto:

$$g = g(\tau, \bar{\tau}) = g_{\alpha\beta^*} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \overline{\frac{dz^\beta}{d\tau}} \tag{4.2}$$

Schouten e van Dantzig ([5]) (3) hanno definito *vettore di prima curvatura* di γ il vettore $\boldsymbol{n}$ di componenti:

$$n^\alpha = \frac{1}{2g}\left(\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} - \frac{\partial \log g}{\partial\tau} \frac{dz^\alpha}{d\tau}\right). \tag{4.3}$$

Effettuando, su γ, una trasformazione analitica di parametro: $\tau' = \tau'(\tau)$, e posto $\dfrac{d\tau'}{d\tau} = pe^{i\vartheta}$, appare che le componenti n^α si trasformano nelle $n^{\alpha'} = e^{-2i\vartheta} n^\alpha$. Dunque, la faccetta caratteristica generata dall'immagine reale di $\boldsymbol{n}$ in V_{2n} risulta indipendente dalla scelta del parametro; e parimenti indipendente da tale scelta risulta il modulo di $\boldsymbol{n}$ (o meglio, della sua immagine reale). Ha dunque senso definire, come si fa per il caso reale, *curvatura geodetica* G di γ il modulo di $\boldsymbol{n}$:

$$G = \sqrt{2\, g_{\alpha\beta^*} n^\alpha n^{\beta^*}}.$$

Una *geodetica complessa* (secondo la definizione di Schouten–van Dantzig) è una curva analitica complessa, la cui curvatura geodetica è identicamente zero. Le sue equazioni differenziali sono pertanto:

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} = \frac{\partial \log g}{\partial\tau} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \qquad \text{(c.c.)}. \tag{4.4}$$

Pur non trattandosi d'un sistema differenziale ordinario (per la presenza in esso di funzioni soltanto semianalitiche), il sistema (4.4) presenta delle evidenti analogie formali con quello che definisce le geodetiche di una varietà reale. In particolare, le (4.4) possono evidentemente riguardarsi come condizioni di autoparallelismo.

5. La superficie caratteristica S_2 di V_{2n} immagine reale della γ del numero precedente, si rappresenta in coordinate isotrope semplicemente considerando, assieme alle (4.1), le equazioni: $z^{\alpha^*} = z^{\alpha^*}(\tau^*)$, con le z^{α^*} funzioni analitiche della variabile complessa τ^*, definite dalle relazioni: $z^{\alpha^*}(\bar{\tau}) = \overline{z^\alpha(\tau)}$.

Per tali superfici, Martinelli ([2]) ha introdotto la nozione di *curvatura caratteristica* K_c; definita, approssimativamente parlando, come la velocità di deviazione angolare (assoluta) subita dalla faccetta caratteristica tangente ad S_2, nel passaggio da un punto di S_2 ad un altro della stessa superficie, « infinitamente vicino » ed in una direzione qualunque.

(3) Cfr. anche T. Otsuki e Y. Tashiro [4].

Il calcolo esplicito di tale curvatura (a partire dalla definizione rigorosa [4]) dà l'espressione:

$$(5.1) \qquad K_c^2 = \frac{1}{(u^\gamma u_\gamma)^3} \begin{pmatrix} \frac{\delta u^\alpha}{d\tau} \\ u^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta u_\beta}{d\tau} \\ u_\beta \end{pmatrix}$$

dove il prodotto tra le matrici s'intende eseguito « righe per righe », ed i diversi simboli hanno i significati seguenti:

$$u^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\tau}; \qquad u_\alpha = g_{\alpha\beta^*} u^{\beta^*} = g_{\alpha\beta^*} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*}$$

$$\frac{\delta u^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{\delta u_\alpha}{d\tau^*} = g_{\alpha\beta^*} \frac{\delta u^{\beta^*}}{d\tau^*} = g_{\alpha\beta^*} \left(\frac{d^2 z^{\beta^*}}{d\tau^{*2}} + \Gamma^{\beta^*}_{\mu^*\nu^*} \frac{dz^{\mu^*}}{d\tau^*} \frac{dz^{\nu^*}}{d\tau^*} \right).$$

Sviluppando l'espressione a secondo membro in (5.1) si ottiene:

$$K_c^2 = \frac{1}{(u^\gamma u_\gamma)^3} \left(u^\alpha u_\alpha \frac{\delta u^\beta}{d\tau} \frac{\delta u_\beta}{d\tau^*} - u_\alpha \frac{\delta u^\alpha}{d\tau} \frac{\delta u_\beta}{d\tau^*} u^\beta \right).$$

Posto, per semplicità e conformemente a (4.2):

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta^*} u^\alpha u^{\beta^*} = g_{\alpha\beta^*} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} = g$$

ed osservando che si ha, per (3.2):

$$\frac{\delta u^\alpha}{d\tau} u_\alpha = g_{\alpha\beta^*} \left(\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} \right) \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} =$$

$$= g_{\alpha\beta^*} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} + g_{\alpha\beta^*} g^{\alpha\rho^*} \frac{\partial g_{\mu\rho^*}}{\partial z^\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(g_{\alpha\beta^*} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} \right) = \frac{\partial g}{\partial \tau}$$

e analogamente:

$$\frac{\delta u_\alpha}{d\tau^*} u^\alpha = \frac{\partial g}{\partial \tau^*}$$

si ottiene:

$$K_c^2 = \frac{1}{g^3} \left(g \frac{\delta u^\alpha}{d\tau} \frac{\delta u_\alpha}{d\tau^*} - \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial g}{\partial \tau^*} \right).$$

(4) Per la quale, vedi E. Martinelli [2].

D'altra parte, per la curva complessa γ (4.1) il valore della curvatura geodetica risulta dato da:

$$G^2 = 2\, g_{\alpha\beta^*}\, n^\alpha\, n^{\beta^*} =$$

$$= 2\, g_{\alpha\beta^*} \frac{1}{4g^2} \left(\frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} - \frac{\partial \log g}{\partial\tau} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \right)$$

$$\left(\frac{d^2 z^{\beta^*}}{d\tau^{*2}} + \Gamma^{\beta^*}_{\mu^*\nu^*} \frac{dz^{\mu^*}}{d\tau^*} \frac{dz^{\nu^*}}{d\tau^*} - \frac{\partial \log g}{\partial\tau^*} \frac{dz^{\beta^*}}{d\tau^*} \right) =$$

$$= 2\, g_{\alpha\beta^*} \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\delta u^\alpha}{d\tau} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial\tau} u^\alpha \right) \left(\frac{\delta u^{\beta^*}}{d\tau^*} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial\tau^*} u^{\beta^*} \right) =$$

$$= \frac{1}{2g^3} \left(g \frac{\delta u^\alpha}{d\tau} \frac{\delta u_\alpha}{d\tau^*} - \frac{\partial g}{\partial\tau} \frac{\partial g}{\partial\tau^*} \right).$$

Si ha pertanto:

$$2\, G^2 = K_c^2 ,$$

ossia, la sostanziale identità della « prima curvatura » di Schouten–van Dantzig con la « curvatura caratteristica » di Martinelli.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU (1969) – *Foundations of differential geometry*, vol. II, ed. Interscience Publ.

[2] E. MARTINELLI (1956) – *Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), *21*, 267–274.

[3] E. MARTINELLI (1960) – *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, « Sem. Mat. Univ. Bari », 52–53.

[4] T. OTSUKI e Y. TASHIRO (1954) – *On curves in kählerian spaces*, « Math. J. Okayama Univ. », *4*, 57–78.

[5] J. A. SCHOUTEN e D. VAN DANTZIG (1930) – *Über unitäre Geometrie*, « Math. Ann. », *103*, 319–346.