
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

VINCENZO ANCONA, GIUSEPPE TOMASSINI

Géométrisation des modifications formelles

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 142–146.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_142_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Géométrisation des modifications formelles* (*). Nota di VINCENZO ANCONA e GIUSEPPE TOMASSINI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si dimostra la versione analitica dei teoremi di M. Artin sull'esistenza delle modificazioni nella categoria degli spazi algebrici (cfr. [2]).

1. ESPACES ANALYTIQUES FORMELS

Pour la théorie générale des espaces analytiques formels on renvoyera à [3] et [4].

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ un espace analytique formel et $x \in \mathcal{X}$. Si $X_1, \dots, X_N$ sont des indéterminées on dénotera par $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N\}^-$ (ou par $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X\}^-$) l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathbb{C}^N, (x,0)}$. Le complété de cet anneau, par rapport à son idéal maximal, est l'anneau local $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}[[X_1, \dots, X_N]]$. On démontre les faits suivants:

- pour tout $f = f(X_1, \dots, X_N) \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N\}^-$ et $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ on peut calculer $f(a_1, \dots, a_N)$ (pourvu que $f, a, \dots, a_N$ ne soient pas inversibles) et on obtient un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$;
- si $t = (t_1, \dots, t_N)$ et $h = (h_1, \dots, h_N)$ sont dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^N$ on a la formule de Taylor: $f(t+h) = f(t) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(t) h_j + \sum_{i,j=1}^N G_{ji}(t, h) h_i h_j$ où les $G_{ij}(X, Y)$ sont dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N\}^-$;
- soient $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N\}^-$ et soit $J_f(X_1, \dots, X_N)$ le jacobien de $f_1, \dots, f_N$; si $f_j(0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, N$, ne sont pas inversibles dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ et $J_f(0, \dots, 0)$ l'est dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ il existe $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ non inversibles tels que $f_j(g_1, \dots, g_N) = 0$, $j = 1, \dots, N$; de plus $g_1, \dots, g_N$ sont déterminées de manière unique.

2. MODIFICATIONS FORMELLES

Soit $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme adique d'espaces analytiques formels, $x' \in \mathcal{X}'$ et $x = f(x')$. On peut démontrer que l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',x'}$ est isomorphe, en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ -algèbre, à une algèbre quotient $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N\}^-/B$ où B est un idéal (N un entier convenable). Si B est engendré par $f_1, \dots, f_q$, dénotons par $J(B)$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre N de la matrice

(*) Travail exécuté dans le cercle de l'activité du G.N.S.A.G.A du C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, ($q \geq N$). Si $\sum_{j=1}^q b_{ij} f_j = 0$, $i = 1, \dots, m$, est un système complet de relations entre $f_1, \dots, f_q$, on dénote par $\mathcal{C}(B)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{x,x}\{X_1, \dots, X_N\}^-$ engendré par les mineurs d'ordre $q - N$ de la matrice (b_{ij}) . Les images $J(f)_{x'}$, $\mathcal{C}(B)_{x'}$ de $J(B)$ et $\mathcal{C}(B)$ dans $\mathcal{O}_{x',x'}$ seront appelées respectivement l'idéal jacobien et l'idéal de Cramer de f en x' . Elles sont indépendantes de la représentation de $\mathcal{O}_{x',x'}$ comme quotient de $\mathcal{O}_{x,x}\{X_1, \dots, X_N\}^-$. On obtient ainsi, quand x' varie, deux faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_x$ -idéaux sur $\mathcal{X}'$, $J(f)$ et $\mathcal{C}(f)$. Cela étant on a la définition de *modification formelle* de façon analogue au cas algébrique (voir [2]).

3. THÉORÈMES D'EXISTENCE

(A) On démontre les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. (Existence des dilatations). *Soit Y un sous-espace analytique fermé d'un espace analytique X , $\mathcal{X}$ le complété formel de X le long de Y . Pour toute modification formelle $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ il existe une modification d'espaces analytiques $f_1: X' \rightarrow X$ et un isomorphisme φ de sa completion $\hat{f}_1$ avec f . Le couple (f_1, φ) est déterminé à un isomorphisme unique près.*

THÉORÈME 2. (Existence des contractions). *Soit Y' un sous-espace analytique d'un espace analytique réduit X' , $\mathcal{X}'$ le complété formel de X' le long de Y' . Supposons qu'il existe une modification formelle $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ avec l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{X}$ soit localement le complété formel d'un espace analytique le long d'un sous-espace. Il existe alors une modification d'espaces analytiques $f_1: X' \rightarrow X$ et un isomorphisme de sa completion $\hat{f}_1$ avec f . Le couple (f_1, φ) est déterminé à un isomorphisme unique près.*

Remarque. Ces Théorèmes sont la version analytique des théorèmes démontrés par M. Artin (voir [2]) dans la catégorie des espaces algébriques (et dans cette situation l'énoncé du Théorème 2 n'exige pas l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{X}$). Si X et $\mathcal{X}'$ (respectivement X' et $\mathcal{X}$) sont lisses le Théorème 1 (respectivement le Théorème 2) a été prouvé, par des méthodes différentes, par Krasnov (voir [8]). On voit facilement que en ce cas là $\mathcal{X}'$ (respectivement $\mathcal{X}$) est automatiquement le complété formel d'une variété le long d'un sous-espace.

Grâce au résultat de Fujiki (voir [6]) le Théorème 2 est une conséquence (pas tout à fait immédiate) du Théorème 1. En effet supposons qu'on ait prouvé le Théorème 1. On se ramène, grâce à un Théorème de unicité, à cette situation: $\mathcal{X}$ est le complété formel d'un espace analytique X le long d'un sous-espace Y ; f induit un morphisme propre et surjectif $g: Y' \rightarrow Y$. A cause du Théorème 1 il existe une modification d'espaces analytiques $f: X'_0 \rightarrow X_0$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & X'_0 \\ g \downarrow & & \downarrow f_0 \\ Y & \hookrightarrow & X_0 \end{array}$$

tel que le complété de X'_0 le long de Y' soit (isomorphe à) $\mathcal{X}'$ et $\hat{f}_0 = f$. A cause d'un théorème de Hironaka (voir [7]) f_0 est dominée par un éclatement: il existe (quitte à restreindre X_0) un éclatement de X_0 , $f_2: X'' \rightarrow X_0$, de centre un sous-espace D , tel que $D_{\text{réd}} = Y_{\text{réd}}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{s} & X'_0 \\ & \searrow f_2 \quad \swarrow f_0 & \\ & X_0 & \end{array}$$

Soit $D'' = f_2^{-1}(D)$ et $\mathcal{X}''$ le complété formel de X'' le long de D'' . On a un morphisme $\hat{s}: \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}'$ et donc, par le Théorème 1, une modification d'espaces analytiques

$$\begin{array}{ccc} D'' & \hookrightarrow & X''_0 \\ \hat{s} \downarrow & & \downarrow s_0 \\ D' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

(où $D'_{\text{réd}} = Y'_{\text{réd}}$) telle que: le complété de X''_0 le long de D'' soit (isomorphe à), $\mathcal{X}''$ et le complété de s_0 soit $\hat{s}$. Soit J l'idéal de D'' dans X'' et J_0 l'idéal de D'' dans X''_0 . On a un isomorphisme $J_0/J_0^2 \simeq J/J^2$. Envisageons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D'' & \hookrightarrow & X''_0 \\ f_{2|D''} \downarrow & & \downarrow \\ D & & \end{array}$$

On peut le compléter par le diagramme suivant (qui est une modification)

$$\begin{array}{ccc} D'' & \hookrightarrow & X''_0 \\ f_{2|D''} \downarrow & & \downarrow \\ D & \hookrightarrow & X \end{array}$$

en appliquant le Théorème de Fujiki. En effet les hypothèses du Théorème de Fujiki sont vérifiées pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D'' & \hookrightarrow & X'' \\ f_{2|D''} \downarrow & & \downarrow \\ D & & \end{array}$$

parce-que l'idéal de D'' dans X'' provient d'un éclatement. Il est facile de voir que le morphisme $X''_0 \rightarrow X$ se factorise à travers un morphisme $X' \rightarrow X$ qui est la contraction cherchée.

(B) Nous voulons maintenant indiquer comment prouver le Théorème 1. Grâce au Théorème d'unicité on se ramène au problème de l'existence locale, à savoir

THÉORÈME 3. *Dans les hypothèses du Théorème 1, soit $x' \in \mathcal{X}'$, $x = f(x')$. Il existe un voisinage de x dans X et un diagramme commutatif d'espaces analytiques*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & U \end{array}$$

tel que le complété formel de X' le long de Y' soit isomorphe à un voisinage de x' dans $\mathcal{X}'$ (isomorphisme compatible avec les applications dans $\mathcal{X}$).

On peut supposer que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',x'}$ soit égal à $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X\}^-/B$ où $B = (f_1, \dots, f_q)$. Si $\mathcal{I}$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et $I = \mathcal{I}_x$ on a dans $D = \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X\}^-$: $I^h D \subset J(B) + B$, $J^h D \subset \mathcal{C}(B) + B$. Soit

$$D^m \xrightarrow{l} D^q \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

une présentation de B comme D -module. Soit L la matrice de l . Le résultat clef pour démontrer le Théorème d'existence locale est exprimé par un Théorème de rigidité que voici:

THÉORÈME DE RIGIDITÉ. *Dans les conditions précédentes il existe un couple (n_0, r) d'entiers avec la propriété suivante: soit $n > n_0$ un entier, $B' = (f'_1, \dots, f'_q)$ un idéal de D tel que $f'_j = f_j \pmod{I^n}$, $j = 1, \dots, q$ et $L'f' = 0$ un système de relations entre les f_j , $j = 1, \dots, q$ où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans D telle que $L' \equiv L \pmod{I^n}$; il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ -automorphisme de D , congru à l'identité modulo I^{n-r} , qui induit un isomorphisme de D/B sur D'/B' .*

Pour la démonstration on utilise les méthodes de Elkik (voir [5]).

Compte tenu du Théorème de rigidité et du Théorème d'approximation de M. Artin (voir [1]) on peut d'abord approximer les $f_1, \dots, f_q$ et la matrice L , modulo I^n , par des éléments de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X_1, \dots, X_N\} = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N, (x,0)}$, disons $f_1^*, \dots, f_q^*$ et L^* . L'anneau $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N, (x,0)}/(f_1^*, \dots, f_q^*)$ définit un germe d'espace analytique X' . L'idéal I définit dans X' un sous-espace Y' et l'anneau local en x' du complété formel de X' le long de Y' est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\{X\}^-/B$ à cause du Théorème de rigidité (et en outre il est clair qu'on a un morphisme $X' \rightarrow X$ à partir de la suite d'homomorphismes $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N, (x,0)} \rightarrow \mathcal{O}_{X',x'}$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN (1968) - *On the solutions of analytic equations*, « Inv. Math. », 5, 277-291.
- [2] M. ARTIN (1970) - *Algebraization of formal moduli. II. Existence of modifications*, « Ann. of Math. », 91, 88-135.
- [3] J. BINGENER - *Über formale komplexe Räume*, à paraître.
- [4] A. GROTHENDIECK-J. DIEUDONNÉ - « E.G.A. », I, vol. I. « I.H.E.S. ».
- [5] R. ELKIK (1973) - *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, « Ann. Ec. Norm. Sup. », 4^{me} série, tome 6, 553-604.
- [6] A. FUJIKI (1974) - *On the blowing down of analytic spaces*, « Publ. Res. Inst. Math. Sci. », 10, 537-507.
- [7] B. G. MOISHEZON - *Modification of complex varieties and the Chow lemma - Class. of compact and complex man.* « Lect. Notes in Math. », 312, Springer-Verlag.
- [8] V. A. KRASNOV (1973) - *Formal modifications. Existence theorems for modifications of complex manifolds* (Russian), « Izv. Akad. Nauk SSSR », 37, (4).