Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maurizio Fattorosi-Barnaba

Equivalenze naturali di topologie e semireticoli

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 107–111.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_107_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Algebra. — *Equivalenze naturali di topologie e semireticoli* (*). Nota di MAURIZIO FATTOROSI–BARNABA, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — Some simple results are discussed, connected with another study performed by the Author elsewhere (see references) about the compatibility between a topology and an algebra. In particular, algebraic properties of natural equivalences of topologies are examined, from the point of view of the theory of semilattices.

0. INTRODUZIONE

In questo lavoro sono raccolti alcuni risultati sulle equivalenze naturali di topologie e questioni connesse, che l'Autore ha ottenuto durante lo studio di una eventuale caratterizzazione algebrica della compatibilità fra algebre e topologie, tramite appunto le equivalenze naturali di queste: vedi [1], [2], [3], di cui per lo più si riprendono convenzioni, notazioni e terminologia (vedi anche oltre).

In generale questi risultati, assai semplici, hanno un evidente carattere di collateralità rispetto alla ricerca sopra citata e tuttavia l'Autore ritiene che anche essi possano avere un qualche interesse e forse stimolare studi più approfonditi.

In particolare vengono studiate alcune proprietà di tipo algebrico, nel senso della teoria dei semireticoli per lo più, della equivalenza naturale di una topologia; si ottengono fra l'altro due caratterizzazioni algebriche di una siffatta equivalenza, in quanto particolare equivalenza sull'insieme delle parti di A.

Verranno sistematicamente usate le seguenti notazioni e convenzioni:

a) le topologie vengono considerate costituite dagli insiemi chiusi, conformemente a quanto fatto già in [1]–[3].

b) se A è un insieme si indica con

(i) 2^A l'insieme delle parti di A

(ii) $\mathbf{2}^A$ il semireticolo con zero $\langle 2^A ; \cup , \varnothing \rangle$

(iii) $\overline{\mathbf{2}}^A$ il semireticolo completo $\langle 2^A ; \cup_k \rangle$ $(k < | 2^{(2^A)} |)$;

(iv) $\underline{\mathbf{2}}^A$ il reticolo $\langle 2^A ; \cup , \cap \rangle$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.–C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

c) una congruenza Φ di un (semi)reticolo si dirà *completa* se è congruenza del (semi)reticolo in questione pensato come completo e quindi come algebra eventualmente infinitaria;

d) si dirà che una equivalenza $\Phi \in \mathscr{E}(A)$ *separa* due oggetti distinti $a, b \in A$ se $(a, b) \notin \Phi$; si dirà che Φ *individua* un oggetto $a \in A$ se $a^{\Phi} = \{a\}$;

e) si dirà che un semireticolo è *quasi–completo* se è chiuso rispetto alla operazione applicata a famiglie qualsiasi ma non vuote di elementi del sostegno.

La bibliografia è ridotta all'essenziale; una bibliografia più vasta si trova in [3].

1. Risultati

In tutto questo paragrafo A indicherà un insieme arbitrario ma fissato una volta per tutte, T e $\{T_i : i \in I\}$ rispettivamente una topologia ed una famiglia di topologie su A.

Proposizione 1. *Φ_T è una congruenza di $\mathbf{2}^A$, ed anzi è una congruenza completa di $\bar{\mathbf{2}}^A$, che individua $\varnothing$.*

Dimostrazione. Basta verificare che Φ_T è una congruenza completa: le altre affermazioni sono ovvie. Se $(X_i, Y_i) \in \Phi_T\,(i \in I, |I| < |2^{(2^A)}|)$ allora

$$\begin{array}{ccccc} \left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\right) K_T & \supseteq & \bigcup\limits_{i \in I} (X_i K_T) & \supseteq & \bigcup\limits_{i \in I} X_i \\ & & \| & & \\ \left(\bigcup\limits_{i \in I} Y_i\right) K_T & \supseteq & \bigcup\limits_{i \in I} (Y_i K_T) & \supseteq & \bigcup\limits_{i \in I} Y_i \end{array}$$

e ne segue sia $\left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\right) K_T \supseteq \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$, e quindi $\left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\right) K_T \supseteq \left(\bigcup\limits_{i \in I} Y_i\right) K_T$, sia l'inclusione opposta a quest'ultima, per simmetria. Da ciò $\left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i, \bigcup\limits_{i \in I} Y_i\right) \in \Phi_T$ cioè la tesi.

Si può osservare che Φ_T *non* è congruenza di $\underline{\mathbf{2}}^A$ perché non rispetta, in generale, le intersezioni: per esempio se $A = \{a, b, c\}$ e $T = \{\varnothing, A, \{a, b\}\} \in \mathscr{T}_A$, allora $(\{a\}, \{b\}), (\{a, c\}, \{c\}) \in \Phi_T$ ma $\{a\} \cap \{a, c\} = \{a\}, \{b\} \cap \{c\} = \varnothing$ e $(\{a\}, \varnothing) \notin \Phi_T$.

Corollario 1. *Le Φ_T–classi sono subsemireticoli quasi–completi e convessi di $\bar{\mathbf{2}}^A$.*

Si osservi che $XK_T = \max(\langle X^{\Phi_T}; \subseteq \rangle)$: per semplificare le notazioni scriveremo, ove possibile, $\max X^{\Phi}$ invece di $\max(\langle X^{\Phi}; \subseteq \rangle)$.

Proposizione 2. *$\Phi \in \mathscr{E}(2^A)$ è del tipo Φ_T sse*

a) $\Phi \in \mathscr{C}(\mathbf{2}^A)$;

b) *ogni Φ–classe ha un massimo (rispetto a $\subseteq$)*;

c) $T = \{\max X^{\Phi} : X \in 2^A\} \in \mathscr{S}(\mathbf{2}^A)$.

Dimostrazione. Φ_T gode delle proprietà *a*), *b*) per la Proposizione 1 ed il Corollario 1; la verifica di *c*) è immediata.

Viceversa, se $\Phi \in \mathscr{E}(A)$ gode delle proprietà *a*), *b*), *c*) allora T in *c*) è una topologia su A e $\Phi = \Phi_T$. Infatti: anzitutto $\varnothing \in T$ per *c*) e $A \in T$ perchè $A = \max A^\Phi$; inoltre, ancora per *c*), se $X, Y \in T$ allora $X \cup Y \in T$; resta da verificare che se $X_i \in T$ $(i \in I)$ allora $\bigcap_{i \in I} X_i \in T$.

Osserviamo che, se $X, Y \in 2^A$, allora

$$\max X^\Phi \cup \max Y^\Phi \in (X \cup Y)^\Phi$$

come segue subito da *a*) e dalla constatazione che $(X, \max X^\Phi), (Y, \max Y^\Phi) \in \Phi$. Inoltre, per *c*), $\max X^\Phi \cup \max Y^\Phi \in T$ e allora

$$\max (X \cup Y)^\Phi = \max X^\Phi \cup \max Y^\Phi. \tag{1}$$

Se ora $X_i \in T$ $(i \in I)$ allora $X_i = \max X_i^\Phi$ e quindi da (1) segue

$$X_i = \max X_i^\Phi = \max \left[X_i \cup \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)\right]^\Phi = \max X_i^\Phi \cup \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi =$$
$$= X_i \cup \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi$$

da cui $X_i \supseteq \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi$, per ogni $i \in I$, e quindi $\bigcap_{i \in I} X_i \supseteq \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi$; ma per definizione $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi$ e di conseguenza $\bigcap_{i \in I} X_i = \max \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\Phi \in T$: pertanto T è una topologia.

Nella topologia T si ha $XK_T = \max X^\Phi$ $(X \in 2^A)$, come segue subito osservando che se $Y \in 2^A$ e $X \subseteq \max Y^\Phi$ allora $\max X^\Phi \subseteq \max Y^\Phi$: infatti da $X \subseteq \max Y^\Phi$ segue $X \cup \max Y^\Phi = \max Y^\Phi$ e quindi

$$X \subseteq \max Y^\Phi \to X \cup \max Y^\Phi = \max Y^\Phi \to \max (X \cup \max Y^\Phi)^\Phi =$$
$$= \max Y^\Phi \xrightarrow[\text{(per (1))}]{} \max X^\Phi \cup \max (\max Y^\Phi)^\Phi = \max X^\Phi \cup \max Y^\Phi =$$
$$= \max Y^\Phi \to \max X^\Phi \subseteq \max Y^\Phi .$$

Pertanto si ha anche

$$X^\Phi = Y^\Phi \quad \text{sse} \quad \max X^\Phi = \max Y^\Phi \quad \text{sse} \quad XK_T = YK_T$$

quindi $\Phi = \Phi_T$.

COROLLARIO 2. *$\Phi \in \mathscr{E}(A)$ è del tipo Φ_T sse*

a') *ogni Φ-classe ha un massimo (rispetto a $\subseteq$)*

b') *la funzione* $\varphi : \mathbf{2}^A \to \mathbf{2}^A$ *è un endomorfismo di* $\mathbf{2}^A$.

$$X \mapsto \max X^\Phi$$

Dimostrazione. Le *a*), *b*), *c*) della Proposizione 2, implicando la (1), implicano *a'*), *b'*). Viceversa, *a'*) = *b*) e *b'*) implica *c*), com'è ovvio, e anche *a*), perchè $\Phi = \ker \varphi$ (verifica di routine).

Notiamo ora come le equivalenze naturali consentano di ottenere caratterizzazioni particolarmente semplici delle topologie con assiomi di separazione T_0 e T_1.

PROPOSIZIONE 3. (*i*) T *è* T_0 *sse* Φ_T *separa i singletons* (*cioè i s.i. di* A *del tipo* $\{a\}$ *con* $a \in A$) *sse* $\Phi_T^* = \Delta_A$;

(ii) T *è* T_1 *sse* Φ_T *individua i singletons.*

Dimostrazione. Ovvia, ricordando che T è T_0 sse

$$\forall a , b \in A : a \neq b \rightarrow \{a\} K_T \neq \{b\} K_T$$

ed è T_1 sse

$$\forall a \in A : \{a\} K_T = \{a\} .$$

PROBLEMA 1. Caratterizzare gli altri assiomi di separazione, ed eventualmente altre proprietà topologiche (compattezza, connessione, ecc.), studiando il comportamento della Φ_T su 2^A.

PROBLEMA 2. Osservando che i singletons di A sono gli atomi del semireticolo $\mathbf{2}^A$ e ricordando che $\Phi_T \in \mathscr{C}(\mathbf{2}^A)$, studiare eventuali generalizzazioni delle caratterizzazioni della Proposizione 3 e/o di quelle suggerite dal Problema 1 alla teoria generale dei semireticoli con atomi (eventualmente atomici) e loro congruenze.

Segnaliamo infine la

PROPOSIZIONE 4. *Per ogni* $\{T_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{T}_A$,

(*i*) $\bigvee_{i \in I} \Phi_{T_i} \subseteq \Phi_{\bigcap_{i \in I} T_i}$

(*ii*) $\bigcap_{i \in I} \Phi_{T_i} \supseteq \Phi_{\bigvee_{i \in I} T_i}$.

La inclusione in (*ii*) *è, in generale, propria.*

Dimostrazione. Ovvia, per quanto riguarda (i) e (ii), ricordando che $T \subseteq T'$ sse $\Phi_T \supseteq \Phi_{T'}$ (vedi (2) in [3]). Quanto al fatto che in (ii) si può avere l'inclusione propria, si esamini il seguente esempio: $A = \{a , b , c\}$, $X = \{a , b\}$, $Y = \{c\}$, $T_1 = \{\varnothing , A , \{a\}\}$, $T_2 = \{\varnothing , A , \{b\}\}$ da cui

$$XK_{T_1} = XK_{T_2} = YK_{T_2} = YK_{T_1} = A \rightarrow (X , Y) \in \Phi_{T_1} \cap \Phi_{T_2} ;$$

ma $T_1 \vee T_2 = \{\varnothing , A , \{a\} , \{b\} , \{a , b\}\}$ e

$$XK_{T_1 \vee T_2} = X \subsetneq A = YK_{T_1 \vee T_2} \rightarrow (X , Y) \notin \Phi_{T_1 \vee T_2} .$$

PROBLEMA 3. Nella (i) della Proposizione 4 vale l'uguaglianza?

Si badi che dimostrare che vale l'uguaglianza equivale a dimostrare che, per ogni $\{T_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_A$, $\bigvee_{i \in I} \Phi_{T_i}$ è del tipo Φ_T: infatti se esiste $T \in \mathcal{T}_A$ tale che $\bigvee_{i \in I} \Phi_{T_i} = \Phi_T$ allora sussiste la seguente catena di implicazioni:

$$\text{per ogni } i \in I : \Phi_T \supseteq \Phi_{T_i}$$
$$\downarrow$$
$$\text{per ogni } i \in I : T \subseteq T_i$$
$$\downarrow$$
$$T \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i$$
$$\downarrow$$
$$\bigvee_{i \in I} \Phi_{T_i} = \Phi_T \supseteq \Phi_{\bigcap_{i \in I} T_i}$$

e quindi vale l'uguaglianza; il viceversa è ovvio. Ora, per dimostrare che $\bigvee_{i \in I} \Phi_{T_i}$ è del tipo Φ_T si può sfruttare la Proposizione 2, osservando che *a*) è certamente vera.

PROBLEMA 4. Se anche nella (i) della Proposizione 4 non vale, in generale, l'uguaglianza, determinare i casi in cui questa vale nella (i) e/o nella (ii).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. FATTOROSI-BARNABA (1976) – *Sulle topologie compatibili con una data algebra*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *60*, 228–234.

[2] M. FATTOROSI-BARNABA e L. F. MAMONE (1977) – *Compatibilità ed equivalenze naturali di una topologia*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *62*, 184–189.

[3] M. FATTOROSI-BARNABA e L. F. MAMONE (1976) – *Proprietà reticolari di certe classi di topologie*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *60*, 793–797.