Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Donato, Domenico Fusco

Sulla propagazione di onde di discontinuità compatibili con un modello magneto-elastico completamente non lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.6, p. 529–537.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_529_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde di discontinuità compatibili con un modello magneto-elastico completamente non lineare* (*). Nota di ANDREA DONATO e DOMENICO FUSCO (**), presentata (***) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — I an earlier paper [1] we deduced the magneto-elastic system of equations in the three-dimensional case. The object of the present paper is to study the propagation of weak discontinuities associated with this system. We have occasion to compare results with other ones known in absence of magnetic field. In the last part of the paper we examine the case of small deformations obtaining the same results as in [8]

1. PREMESSE

Recentemente [1] si è affrontato il problema di trovare le equazioni del moto per un mezzo elastico immerso in un campo magnetico variabile e sottoposto a deformazioni finite facendo le seguenti ipotesi:

i) mezzo magneto-elastico perfetto (conducibilità infinita, non magnetizzabile né polarizzabile);

ii) mezzo non magnetico (permeabilità magnetica costante);

iii) assenza di cariche elettriche e di forze esterne; corrente di spostamento trascurabile;

iv) materiale iperelastico omogeneo ed isotropo sottoposto a trasformazioni reversibili ed isoterme a partire da uno stato di equilibrio;

v) energia libera dipendente soltanto dagli invarianti principali del tensore di deformazione e non dal campo magnetico [2].

Si è giunti al seguente sistema di equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{\rho}\ddot{u}_i = \mathrm{T}_{ki,k} + \overline{\mathrm{M}}_{ik,k} \\ \dot{\overline{\mathrm{B}}}_i = 0 \qquad \overline{\mathrm{B}}_{i,i} = 0 \end{cases}$$

con

$$(2)\qquad \overline{\mathrm{M}}_{ik} = \mathrm{Y}^{\mathrm{M}}_{kl}\, x_{i,l} \qquad\qquad \mathrm{Y}^{\mathrm{M}}_{kl} = (1/\mu\mathrm{D})\,(\overline{\mathrm{B}}_k\,\overline{\mathrm{B}}_l - \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{B}}_r\,\overline{\mathrm{B}}_s\,\mathrm{G}_{rs}\,\mathrm{G}^{-1}_{kl})$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti del C.N.R. – Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.

(**) Istituto di Matematica dell'Università di Messina.

(***) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

Nelle (1) T_{ki} è il tensore di Piola-Kirchhoff legato alle componenti lagrangiane della sollecitazione Y_{ki} dalla relazione

$$T_{ki} = Y_{kl}\, x_{i,l} , \tag{3}$$

$u_i = x_i - y_i$ rappresenta il vettore spostamento; x_i sono le coordinate della generica particella del mezzo nello stato attuale; y_i sono le coordinate della stessa particella nello stato iniziale; $\bar{\rho}$ la densità del mezzo nello stato iniziale che riterremo costante; $D = \det \| x_{i,k} \|$; $, = \partial/\partial y_k$; $/k = \partial/\partial x_k$; $. = \partial/\partial t$; $\overline{B}_l$ rappresentano le componenti lagrangiane della induzione magnetica legate all'induzione magnetica in coordinate euleriane B_k dalla relazione [1]

$$\overline{B}_l = D y_{l/k}\, B_k ; \tag{4}$$

G_{ik} è il tensore sinistro di Cauchy-Green espresso dalla relazione

$$G_{ik} = x_{r,i}\, x_{r,k} = \delta_{ik} + 2\, \varepsilon_{ik} , \tag{5}$$

dove δ_{ik} è il tensore di Kronecker ed ε_{ik} è il tensore di deformazione espresso da

$$\varepsilon_{ik} = 1/2\, (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i}\, u_{r,k}) . \tag{6}$$

Essendo, nel caso in esame, il materiale iperelastico vale il legame costitutivo

$$Y_{ik} = 2\, \partial W/\partial G_{ik} = \partial W/\partial \varepsilon_{ik} \tag{7}$$

si ha inoltre

$$Y^{M}_{ik} = 2\, \partial \Gamma/\partial G_{ik} = \partial \Gamma/\partial \varepsilon_{ik} \tag{8}$$

con

$$\Gamma = \frac{1}{2\,\mu D}\, G_{kl}\, \overline{B}_k\, \overline{B}_l . \tag{9}$$

Infine per gli sviluppi futuri conviene introdurre i seguenti legami dedotti in [1],

$$\overline{B}_k = \mu D \overline{H}_l\, G^{-1}_{lk} \qquad \overline{H}_l = H_k\, x_{k,l} \tag{10}$$

con

$$G_{ik}\, G^{-1}_{kl} = \delta_{il} \qquad B_k = \mu H_k .$$

Le $\overline{H}_l$ si possono interpretare come le componenti lagrangiane del campo magnetico.

Dopo (7) e (8), posto

$$S_{ik} = Y_{ik} + Y^{M}_{ik} = 2\, \partial\psi/\partial G_{ik} \qquad \psi = W + \Gamma \tag{11}$$

le equazioni (1) si scrivono

$$
\left\{\begin{array}{ll} \bar{\rho}\ddot{u}_i = (\mathrm{S}_{kl}\, x_{i,l})_{,k} & \\ \dot{\overline{\mathrm{B}}}_i = 0 & \overline{\mathrm{B}}_{i,i} = 0\,. \end{array}\right. \tag{12}
$$

Da (12) segue che $\overline{\mathrm{B}}_i$ dipende solo dalle y_i e non da t. Questo risultato è in accordo con quanto stabilito in [2] e [3].

2. EQUAZIONI PER LE DISCONTINUITÀ

Supponiamo che il vettore spostamento u_i sia di classe C^2 a tratti, e che l'induzione magnetica sia di classe C^1 a tratti e che le discontinuità si presentino attraverso la superficie

$$
\varphi\,(y_i\,,t) = 0 \qquad\qquad (i = 1\,,2\,,3)\,.
$$

Indichiamo rispettivamente con

$$
\bar{\lambda} = -\frac{\varphi_t}{|\nabla\varphi|} \quad , \quad n_i = \frac{\varphi_{,i}}{|\nabla\varphi|} \qquad \left(\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\right) \tag{13}
$$

la velocità normale di avanzamento del fronte d'onda e il versore della normale alla superficie di discontinuità, espressa tramite le coordinate iniziali. Sia, inoltre,

$$
\delta^2 u_i = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi+0} - \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi-0} \quad ; \quad \delta\overline{\mathrm{B}}_i = \left(\frac{\partial\overline{\mathrm{B}}_i}{\partial\varphi}\right)_{\varphi+0} - \left(\frac{\partial\overline{\mathrm{B}}_i}{\partial\varphi}\right)_{\varphi-0}. \tag{14}
$$

Dalla (5) si ottiene

$$
\delta\mathrm{G}_{ik} = \beta_i\, n_k + \beta_k\, n_i \qquad \beta_i = x_{r,i}\,\delta^2 u_r \tag{15}
$$

ed analogamente dal sistema (12) segue

$$
\left\{\begin{array}{ll} (\bar{\rho}\bar{\lambda}^2 - \mathrm{S}_{kl}\, n_k\, n_l)\,\beta_s = \delta\mathrm{S}_{kl}\,\mathrm{G}_{ls}\, n_k & \\ -\bar{\lambda}\delta\overline{\mathrm{B}}_i = 0 & \delta\overline{\mathrm{B}}_i\, n_i = 0\,. \end{array}\right. \tag{16}
$$

Nel caso in cui $\bar{\lambda} \neq 0$ segue necessariamente $\delta\overline{\mathrm{B}}_i = 0$. Restando in tale ipotesi, identifichiamo il sistema di riferimento con un sistema di assi che siano direzioni unite per la matrice G_{ik}. Indicando con $\boldsymbol{e}_i$ i versori ortonormali di tali assi, la matrice $\mathbf{G} = \|\mathrm{G}_{ik}\|$ assume la forma

$$
\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{G}_i\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \qquad\qquad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{17}
$$

essendo G_i gli autovalori di $\mathbf{G}$. Segue anche

$$\overline{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^{3} \overline{B}_i \boldsymbol{e}_i \quad ; \quad \beta = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \boldsymbol{e}_i \quad ; \quad \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \boldsymbol{e}_i . \tag{18}$$

Dalla (11), tenendo conto che $W = W(I, J, D)$ in quanto il mezzo in esame è omogeneo ed isotropo e dopo le (9), si ottiene:

$$\mathbf{S} = 2(\psi_I + I\psi_J)\,\mathbf{1} - 2\,\psi_J\,\mathbf{G} + D\psi_D\,\mathbf{G}^{-1} + 1/\mu D\,\overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \tag{19}$$

dove

$$I = \sum_{i=1}^{3} G_i \quad ; \quad J = G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 \quad ; \quad D = (G_1 G_2 G_3)^{1/2}. \tag{20}$$

Di conseguenza si ha

$$(\delta\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \mathbf{G} = \sum_{\gamma,\alpha} \left\{ T_{\alpha\gamma}\, n_\alpha G_\alpha \beta_\gamma n_\gamma - \overline{B}_n \overline{H}_\alpha \frac{\beta_\gamma n_\gamma}{G_\gamma} - \frac{\overline{B}_n}{\mu D} \overline{B}_\gamma \beta_\gamma n_\alpha \right\} \boldsymbol{e}_\alpha \tag{21}$$

dove

$$\begin{aligned} T_{\alpha\gamma} = 4 \Big\{ & \psi_{II} + \psi_{IJ}\,[(I - G_\alpha) + (I - G_\gamma)] + \\ & + \tfrac{1}{2}\psi_J + \psi_{JJ}\,(I - G_\alpha)(I - G_\gamma) + \tfrac{1}{2} D\psi_{DI} \left(\frac{1}{G_\alpha} + \frac{1}{G_\gamma} \right) + \\ & + \tfrac{1}{2} D\psi_{DJ} \left[\frac{I - G_\gamma}{G_\alpha} + \frac{I - G_\alpha}{G_\gamma} \right] + \tfrac{1}{4} D^2 \psi_{DD}/G_\alpha G_\gamma \Big\} . \end{aligned} \tag{22}$$

È facile verificare che $T_{\alpha\gamma}$ può essere espresso anche nella seguente forma

$$T_{\alpha\gamma} = 4\,W^{\alpha\gamma} - 4\,W_J(1/2 - \delta_{\alpha\gamma}) - 2\,DW_D/G_\alpha G_\gamma \cdot (1/2 - \delta_{\alpha\gamma}) + \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{H}}/G_\alpha G_\gamma \tag{23}$$

con

$$W^{\alpha\gamma} = \partial^2 W / \partial G_\alpha\, \partial G_\gamma . \tag{24}$$

Indicando con

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{\alpha\gamma} = T_{\alpha\gamma}\, G_\alpha n_\alpha n_\gamma - \overline{B}_n \overline{H}_\alpha \frac{n_\gamma}{G_\gamma} - \frac{\overline{B}_n}{\mu D} n_\alpha \overline{B}_\gamma \\ & \nu = \overline{\rho}\overline{\lambda}^2 - 2\,\psi_I - \frac{\overline{B}_n^2}{\mu D} \\ & \eta_\alpha = \nu + 2\,\psi_J\,(G_{nn} + G_\alpha - I) \qquad\qquad (G_{nn} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{n}) \end{aligned} \right. \tag{25}$$

il sistema per le discontinuità (16) si scrive

$$(\eta_\alpha \, \delta_{\alpha\gamma} - A_{\alpha\gamma}) \, \beta_\gamma = 0 \tag{26}$$

che conduce al polinomio caratteristico

$$\eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \left(\sum_\gamma \frac{A_{\gamma\gamma}}{\eta_\gamma} - 1 \right) - \sum_\gamma \eta_\gamma \frac{\partial A}{\partial A_{\gamma\gamma}} + A = 0 \qquad A = \det \| A_{\alpha\gamma} \| . \tag{27}$$

3. ONDE PRINCIPALI

Consideriamo il caso speciale in cui la normale $\boldsymbol{n}$ coincide con uno dei versori degli assi, ad esempio $\boldsymbol{n} \equiv (1, 0, 0)$. Le onde che si propagano in tale direzione vengono usualmente chiamate « onde principali ».

Si vede subito che il polinomio caratteristico si scrive

$$\eta_2 \, \eta_3 \left(\eta_1 - T_{11} \, G_1 + 2 \, \overline{B}_n \frac{\overline{B}_1}{\mu D} \right) - \frac{\overline{B}_n^2}{\mu D G_1} (\eta_3 \, \overline{B}_2 \, \overline{H}_2 + \eta_2 \, \overline{B}_3 \, \overline{H}_3) = 0 . \tag{28}$$

Introducendo gli allungamenti principali definiti da

$$1 + \Delta_\alpha = \sqrt{G_\alpha} \qquad -1 < \Delta_\alpha < \infty \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

e osservando che

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_\alpha^2} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial G_\alpha^2} G_\alpha + 2 \frac{\partial W}{\partial G_\alpha}$$

la (28), dopo le (23), si scrive

$$\begin{aligned} \eta_2 \, \eta_3 \left(\rho \overline{\lambda}^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_1^2} \right) - \eta_3 \frac{\overline{B}_2 \, \overline{H}_2}{G_1} \left(\eta_2 + \frac{\overline{B}_1^2}{\mu D} \right) - \\ - \eta_2 \frac{\overline{B}_3 \, \overline{H}_3}{G_1} \left(\eta_3 + \frac{\overline{B}_1^2}{\mu D} \right) = 0 . \end{aligned} \tag{29}$$

Nel caso speciale in cui $\overline{B}_n = \overline{B}_1 = 0$ la (29) conduce alle seguenti velocità di propagazione

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \overline{\lambda}^2 &= 2 \, \psi_I + 2 \, \psi_J \, G_s \\ \rho \overline{\lambda}^2 &= \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta_1^2} + \frac{\overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{H}}}{G_1} \end{aligned} \right. \qquad (s = 2, 3) . \tag{30}$$

Le $(30)_1$ sono onde trasversali, la $(30)_2$ rappresenta un'onda longitudinale.

Cominciamo ad osservare che le velocità di propagazione fornite da $(30)_1$ sono certamente reali se sono verificate le condizioni

$$\psi_{\mathrm{I}} \geq 0 \qquad \psi_{\mathrm{I}} + \psi_{\mathrm{J}} \geq 0$$

oppure

$$\psi_{\mathrm{I}} \geq -\mathrm{G}_s \, \psi_{\mathrm{J}} > 0 \, .$$

La $(30)_2$ è certamente reale se sono verificate le condizioni di accettabilità matematica sui potenziali elastici date da Grioli [5].

Dalle (30) si ottiene un'onda doppia se $\psi_{\mathrm{J}} = 0$. Ciò coincide con un noto risultato di Truesdell ritrovato anche in [4] da Ruggeri. La condizione $\psi_{\mathrm{J}} = 0$ nel caso $\overline{\mathrm{B}}_1 = \overline{\mathrm{B}}_n = 0$ assicura l'esistenza di un'onda doppia solo nel caso speciale in cui $\boldsymbol{n}$ sia parallelo ad uno dei versori degli assi; per $\boldsymbol{n}$ generico ciò non è vero. Passiamo quindi allo studio del caso $\psi_{\mathrm{J}} = 0$ con $\boldsymbol{n}$ generico.

4. Caso $\psi_{\mathrm{J}} = 0$

In tal caso per $\mathrm{A}_{\alpha\gamma}$ si ottiene la seguente espressione

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\alpha\gamma} = {} & \{4\,\psi_{\mathrm{II}}\,\mathrm{G}_\alpha + 2\,\mathrm{D}\psi_{\mathrm{DI}}\,(1 + \mathrm{G}_\alpha/\mathrm{G}_\gamma) + \mathrm{D}^2\,\psi_{\mathrm{DD}}/\mathrm{G}_\gamma\}\, n_\alpha\, n_\gamma + \\ & - \overline{\mathrm{B}}_n\, n_\gamma\, \overline{\mathrm{H}}_\alpha/\mathrm{G}_\gamma - \overline{\mathrm{B}}_n\, \overline{\mathrm{B}}_\gamma\, n_\alpha/\mu\mathrm{D} \, , \end{aligned} \tag{31}$$

ed il sistema omogeneo (26) si particolarizza in

$$(\nu\delta_{\alpha\gamma} - \mathrm{A}_{\alpha\gamma})\,\beta_\gamma = 0 \tag{32}$$

che conduce al polinomio caratteristico

$$\nu^3 - \mathrm{I}_{\mathrm{A}}\,\nu^2 + \mathrm{II}_{\mathrm{A}}\,\nu - \mathrm{III}_{\mathrm{A}} = 0 \tag{33}$$

con

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{\mathrm{A}} &= 4\,\{\psi_{\mathrm{II}}\,\mathrm{G}_{nn} + \mathrm{D}\psi_{\mathrm{ID}} + 1/4\,\mathrm{D}^2\,\psi_{\mathrm{DD}}\,\mathrm{G}_{nn}^{-1} - \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{B}}_n^2/\mu\mathrm{D}\} \\ \mathrm{II}_{\mathrm{A}} &= -4\,\mathrm{D}^2\,\{\psi_{\mathrm{II}}\,\psi_{\mathrm{DD}} - \psi_{\mathrm{ID}}^2\}\,(1 - \mathrm{G}_{nn}\,\mathrm{G}_{nn}^{-1}) + \overline{\mathrm{B}}_n^2\,\{\overline{\mathrm{B}}_n^2/\mu^2\,\mathrm{D}^2 - \\ & \quad - \mathrm{G}_{nn}^{-1}\,\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{H}}/\mu\mathrm{D}\} + 4\,\overline{\mathrm{B}}_n\,\mathrm{D}\psi_{\mathrm{ID}}\,(\overline{\mathrm{H}}_n\,\mathrm{G}_{nn}^{-1} - \overline{\mathrm{B}}_n/\mu\mathrm{D}) - 8\,\overline{\mathrm{B}}_n\,\psi_{\mathrm{II}}\,(\mathrm{G}_{nn}\,\overline{\mathrm{B}}_n/\mu\mathrm{D} - \overline{\mathrm{H}}_n) \\ \mathrm{III}_{\mathrm{A}} &= 4\,\psi_{\mathrm{II}}\,\overline{\mathrm{B}}_n^2/\mathrm{D}^2\,\{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{G}\cdot(\overline{\mathbf{H}}\wedge\boldsymbol{n})\}\,\{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot(\overline{\mathbf{B}}\wedge\boldsymbol{n})\} \, . \end{aligned} \tag{34}$$

Se $\overline{\mathrm{B}}_n = 0$ si ottiene la radice

$$\nu = 0 \Rightarrow \overline{\rho\lambda}^2 = 2\,\psi_{\mathrm{I}} \tag{35}$$

e le altre due soddisfano l'equazione

$$\nu^2 - \mathrm{I}_{\mathrm{A}}\,\nu + \mathrm{II}_{\mathrm{A}} = 0 \, . \tag{36}$$

Affinché si abbia la radice doppia $\nu = 0$, il che comporta l'eccezionalità dell'onda che si propaga con la velocità $\overline{\rho\lambda}^2 = 2\,\psi_{\mathrm{I}}$, essendo il sistema di equazioni (1) in forma conservativa [6], occorre che sia

$$\psi_{\mathrm{II}}\,\psi_{\mathrm{DD}} - \psi_{\mathrm{ID}}^2 = 0\,. \tag{37}$$

La (37) è certamente soddisfatta nel caso in cui

$$W_{\mathrm{I}} = \text{cost.} = k/2$$

il che comporta

$$\psi = k/2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{F}(\mathrm{D}) + \Gamma\,.$$

La (37) in assenza di campo magnetico conduce alla condizione sul potenziale elastico, trovata da Ruggeri, affinché si abbia un'onda doppia [4].

Nel caso in cui $W_{\mathrm{I}} = k/2$ le velocità di propagazione sono

$$\begin{cases} \overline{\rho\lambda}^2 = k & \text{(2 volte)} \\ \overline{\rho\lambda}^2 = k + (\mathrm{D}^2\,\mathrm{F}'' + \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{H}})\,G_{nn}^{-1}\,. \end{cases}$$

In generale, se è verificata la condizione (37) le velocità di propagazione si scrivono

$$\begin{cases} \overline{\rho\lambda}^2 = 2\,\psi_{\mathrm{I}} & \text{(2 volte)} \\ \overline{\rho\lambda}^2 = \sum_{r=1}^{3} \left\{ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \Delta_r^2} + \dfrac{\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{H}}}{G_r} \right\} n_r^2\,. \end{cases} \tag{39}$$

Tali velocità per $\boldsymbol{n} \equiv (1\,,0\,,0)$ si particolarizzano in quelle già trovate nel caso delle direzioni privilegiate.

Segue banalmente che l'onda doppia è un'onda parallela [7] in quanto risulta indipendente da $\boldsymbol{n}$.

Dalle (10) segue

$$\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{H}} = G_{kl}\,\overline{B}_k\,\overline{B}_l/\mu\mathrm{D}$$

ed essendo G_{kl} definita positiva, si ha che la $(39)_2$ è certamente positiva se $\mu > 0$ e se sono verificate le condizioni sull'accettabilità matematica dei potenziali elastici stabilite da Grioli [5].

Osserviamo che il polinomio caratteristico (33) ammette la radice $\nu = 0$ anche se $\psi_{\mathrm{I}} = \text{cost} = k/2$ senza essere $\overline{B}_n = 0$. In tal caso si ottiene la velocità di propagazione

$$\overline{\rho\lambda}^2 = k + \overline{B}_n^2/\mu\mathrm{D} \tag{40}$$

che in generale non è doppia. Le altre velocità sono fornite da (36) con

$$\begin{cases} \mathrm{I}_{\mathrm{A}} = -\,2\,\overline{B}_n^2/\mu\mathrm{D} + \mathrm{D}^2\,\psi_{\mathrm{DD}}\,G_{nn}^{-1} \\ \mathrm{II}_{\mathrm{A}} = \overline{B}_n^2\,(\overline{B}_n^2/\mu^2\,\mathrm{D}^2 - G_{nn}^{-1}\,\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{H}}/\mu\mathrm{D})\,. \end{cases} \tag{41}$$

Dimostriamo ora che l'onda associata alla (40) è sempre eccezionale. Nel caso $\psi_I = k/2$ la matrice $A_{\alpha\gamma}$ fornita da (31) si specializza in

$$A_{\alpha\gamma} = D^2 \psi_{DD} n_\alpha n_\gamma / G_\gamma - \overline{B}_n n_\gamma \overline{H}_\alpha / G_\gamma - \overline{B}_n \overline{B}_\gamma n_\alpha / \mu D \,. \tag{42}$$

Inoltre, per $\nu = 0$ la (32) fornisce la seguente relazione a cui devono soddisfare le β_γ:

$$(D^2 \psi_{DD} n_\alpha - \overline{B}_n \overline{H}_\alpha) \delta D/D - \overline{B}_n/\mu D \, \overline{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\beta} n_\alpha = 0 \tag{43}$$

dove si è tenuto conto della relazione

$$\delta D/D = \sum_\gamma \beta_\gamma n_\gamma / G_\gamma \tag{44}$$

facilmente deducibile da (15) e (20).

Se si esclude il caso $\overline{\mathbf{H}} \parallel \boldsymbol{n}$ che verrà esaminato a parte, la (43) comporta

$$\delta D/D = 0 \qquad \overline{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\omega} \wedge \overline{\mathbf{B}} \tag{45}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ un vettore arbitrario non parallelo a $\overline{\mathbf{B}}$.

Dopo $(45)_1$ si verifica immediatamente la condizione di eccezionalità per le $\overline{\lambda}^2$ fornite da (40), cioè

$$\delta \overline{\lambda}^2 = - \overline{B}_n^2 / \mu \overline{\rho} \, D^2 \, \delta D = 0 \,. \tag{46}$$

Se $\overline{\mathbf{H}} \parallel \boldsymbol{n}$ si ha $\overline{\mathbf{H}} = \overline{H}_n \boldsymbol{n}$ di conseguenza dalle (42) e (10) segue

$$A_{\alpha\gamma} \beta_\gamma = (D^2 \psi_{DD} - 2 \overline{B}_n \overline{H}_n) \delta D/D = 0$$

il che in generale comporta ancora $\delta D = 0$ e quindi l'eccezionalità delle (40).

Infine si vede agevolmente che il valore di $\boldsymbol{\beta}$ associato alle altre velocità di propagazione fornite da

$$\nu^2 - I_A \nu + II_A = 0$$

con I_A e II_A espressi da (41) è

$$\boldsymbol{\beta} \propto (\overline{\rho} \overline{\lambda}^2 - k) \boldsymbol{n} - \overline{B}_n G_{nn}^{-1} \overline{\mathbf{H}} \,.$$

5. Legame lineare tra sforzi e deformazioni

Nel caso linearizzato W ha la seguente espressione

$$W = \tfrac{1}{2} (\gamma + 2 \tau) I_1^2 - 2 \tau I_2 \tag{47}$$

dove γ e τ rappresentano i coefficienti di Lamè e valgono le relazioni

$$\begin{aligned} I &= G_1 + G_2 + G_3 = 3 + 2 I_1 \\ J &= G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 = 3 + 4 I_1 + 4 I_2 \,. \end{aligned} \tag{48}$$

Di conseguenza, al limite per $G_\alpha \to 1$, $D \to 1$ si trova

$$A_{\alpha\gamma} = \{(\gamma + \tau) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\}\, n_\alpha\, n_\gamma - B_n\, H_\alpha\, n_\gamma - B_n\, H_\gamma\, n_\alpha \tag{49}$$

$$\eta_\alpha = \rho\lambda^2 - B_n^2/\mu D - \tau = \eta \tag{50}$$

dove si è tenuto conto anche del fatto che per piccole vibrazioni $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, $\overline{\rho} = \rho$.

La (32) si specializza nel caso in esame in

$$(\eta\delta_{\alpha\gamma} - A_{\alpha\gamma})\, \beta_\gamma = 0 \tag{51}$$

che conduce alle velocità di propagazione

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = V_d^2 + V_A^2 \\ \lambda_{(s)}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\rho} H^2 + V_c^2 + V_d^2 + (-1)^s \sqrt{\Delta}\right) \qquad (s = 2, 3) \end{cases} \tag{52}$$

con

$$V_c^2 = \frac{\gamma + 2\tau}{\rho} \qquad V_d^2 = \frac{\tau}{\rho} \qquad V_A^2 = \frac{\mu}{\rho} H_n^2$$

$$\Delta = \left(\frac{\mu}{\rho} H^2 - V_c^2 + V_d^2\right)^2 + 4\,(V_c^2 - V_d^2)\,\frac{\mu}{\rho} H_t^2 > 0\,.$$

Le (52) coincidono con quelle trovate da Donato in [8], al quale si rimanda per la discussione dell'eccezionalità e lo studio degli urti [9].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. DONATO (1977) – *On a magneto-elastic system with discontinuous coefficients and the propagation of weak discontinuity*, «Meccanica A.I.M.E.T.A.» (in corso di stampa).
[2] J. BAZER e W. B. ERICSON (1974) – *Non linear Wave Motion in Magnetoelasticity*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», *55* (2), 124–192.
[3] M. F. MCCARTHY (1968) – *Wave propagation in non linear Magneto-Thermo-Elasticity*, Proceedings of vibration problems, Warsaw, *4*, 9.
[4] T. RUGGERI (1977) – *Onde di discontinuità ed equazioni costitutive nei corpi elastici isotropi sottoposti a deformazioni finite*, «Annali di Matematica pura ed applicata», ser. IV, *112*, 315–332.
[5] G. GRIOLI (1966) – *On the thermodinamic potential for continuums with reversible transformation, some possible types*, «Meccanica», *1*, 15–20.
[6] G. BOILLAT (1972) – *Chocs caractèristiques*, «C.R. Acad. Sc. Paris», *274* A, 1018–1021.
[7] G. BOILLAT (1965) – *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars, Paris.
[8] A. DONATO (1973) – *Sulla eccezionalità delle onde di mutua influenza magnetoelastica*, «Boll. U.M.I.» (4) *8*, 317–326.
[9] A. DONATO (1974) – *Sulle onde d'urto in magneto-elasticità*, «Boll. U.M.I.», (4) *9*, 376–385.