Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Vacca

Sul potenziale degli sforzi nei mezzi cristallini dielettrici polarizzabili, soggetti a un campo magnetico costante e in moto vibratorio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.6, p. 522–528.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_522_0>

Meccanica dei continui. — *Sul potenziale degli sforzi nei mezzi cristallini dielettrici polarizzabili, soggetti a un campo magnetico costante e in moto vibratorio* (*). Nota II di MARIA TERESA VACCA, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — We consider elastic dielectric crystals, in which the phenomenon of piezoelectric polarization occurs, in vibratory motion under an external uniform magnetic field. By the Beltrami-Somigliana method founded on invariability of some quadratic forms under co-ordinate transformations, the internal stress-potential for various cristalline structures is determined.

1. INTRODUZIONE

Con riferimento ai mezzi cristallini dielettrici in cui si manifesta il fenomeno di polarizzazione piezoelettrica, soggetti a un campo magnetico esterno costante e in moto vibratorio, per i quali nella Nota I precedente si sono stabilite le equazioni del campo e del moto, ci proponiamo ora di assegnare, per le diverse forme di struttura cristallina, il potenziale degli sforzi interni, elastici e di polarizzazione, che per la linearità di questi sforzi sarà una forma omogenea quadratica nelle componenti u_{ik} della pura deformazione, nelle componenti ω_i della rotazione e nelle componenti p_i della polarizzazione.

Le forme che il detto potenziale può assumere dipenderanno dalle proprietà di simmetria dei cristalli. Queste forme saranno la combinazione lineare a coefficienti costanti di un certo numero di invarianti quadratici che vanno determinati caso per caso. Per ottenere queste forme seguiremo un criterio adoperato da Somigliana nel caso della pura elasticità [1], ma che si può dire risalga a Beltrami [2], nella sua determinazione delle forme isotrope del potenziale. Esso è fondato sulla invarianza di certe forme quadratiche per effetto della trasformazione di coordinate.

2. MEZZI CHE AMMETTONO UN ASSE DI ISOTROPIA. INVARIANTI DI ROTAZIONE

Incominciamo a considerare il caso in cui il mezzo ammette un asse di isotropia e questo sia l'asse x_3. Supponiamo allora di passare dal sistema di assi x_1 , x_2 , x_3 ad un nuovo sistema di assi x'_1 , x'_2 , x'_3 con $x'_3 \equiv x_3$, mediante

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

(1) Cfr. C. SOMIGLIANA, *Sul potenziale elastico*, «Annali di Matematica», 7 (1901).

(2) Cfr. E. BELTRAMI, *Note fisico-matematiche*, «Rend. Cir. Matem. di Palermo», T. III (1889).

la rotazione di un angolo α intorno all'asse x_3. In questa rotazione sussistono le relazioni simboliche

$$(2.1)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1'} + i\frac{\partial}{\partial x_2'} = e^{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_3'} = \frac{\partial}{\partial x_3} \; ,$$

dove $i = \sqrt{-1}$ equivale, dal punto di vista geometrico, all'operatore che nel piano (x_1 , x_2) produce una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'asse x_3 ed $e^{i\alpha}$ equivale ad una rotazione di α radianti intorno allo stesso asse. Se consideriamo ora il vettore spostamento $\boldsymbol{u}\,(u_1 , u_2 , u_3)$, esso si trasforma nel vettore $\boldsymbol{u}'\,(u_1' , u_2' , u_3')$ tale che

$$(2.2)\qquad u_1' + iu_2' = e^{i\alpha}(u_1 + iu_2) \quad , \quad u_3' = u_3 \, .$$

Combinando opportunamente per moltiplicazione le (2.1) con le (2.2) e le loro coniugate si deducono le relazioni

$$(a)\qquad u_{11}' - u_{22}' + iu_{12}' = e^{2i\alpha}(u_{11} - u_{22} + iu_{12}) \, ,$$

$$(b)\qquad u_{11}' + u_{22}' = u_{11} + u_{22} \, ,$$

$$(c)\qquad u_{31}' + iu_{23}' = e^{i\alpha}(u_{31} + iu_{23}) \, ,$$

$$(d)\qquad u_{33}' = u_{33} \, .$$

In modo analogo alle (2.2) si deducono per le componenti del vettore rotazione ω e del vettore polarizzazione $\boldsymbol{p}$ le relazioni

$$(e)\qquad \omega_1' + i\omega_2' = e^{i\alpha}(\omega_1 + i\omega_2) \, , \qquad (f)\quad \omega_3' = \omega_3 \, ,$$

$$(g)\qquad p_1' + ip_2' = e^{i\alpha}(p_1 + ip_2) \, , \qquad (h)\quad p_3' = p_3 \, .$$

Dalle relazioni (a), (b), (c), (d), (e), (f) e dalle loro coniugate, mediante l'eliminazione del fattore esponenziale $e^{i\alpha}$, formando precisamente i prodotti

$$(2.3)\qquad (b\cdot b) \, , (d\cdot d) \, . (b\cdot d) \, , (a\cdot a^*) \, , (c\cdot c^*) \, , (e\cdot e^*) \, , (f\cdot f) \, , (d\cdot f) \, , (b\cdot f) \, , (c\cdot e^*) \, ,$$

si hanno i seguenti undici invarianti quadratici fra le componenti di deformazione e quelle di rotazione:

$$(2.4)\qquad \mathrm{I}_1 = (u_{11} + u_{22})^2 \quad , \quad \mathrm{I}_2 = u_{33}^2 \quad , \quad \mathrm{I}_3 = (u_{11} + u_{22})\, u_{33} \, ,$$

$$\mathrm{I}_4 = (u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}^2 \quad , \quad \mathrm{I}_5 = u_{31}^2 + u_{23}^2 \, ,$$

$$\mathrm{R}_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad , \quad \mathrm{R}_2 = \omega_3^2 \quad , \quad \mathrm{R}_3 = u_{33}\,\omega_3 \quad , \quad \mathrm{R}_4 = (u_{11} + u_{22})\,\omega_3 \, ,$$

$$\mathrm{R}_5 = u_{31}\,\omega_1 + u_{23}\,\omega_2 \quad , \quad \mathrm{R}_6 = u_{23}\,\omega_1 - u_{31}\,\omega_2 \, .$$

Analogamente dai prodotti

$$(2.5)\qquad (d\cdot h) \, , (b\cdot h) \, , (c\cdot g^*) \, , (f\cdot h) \, , (e\cdot g^*)$$

si hanno gli ulteriori sette invarianti quadratici

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & J_1 = u_{33}\, p_3 \quad , \quad J_2 = (u_{11} + u_{22})\, p_3 \quad , \quad J_3 = u_{31}\, p_1 + u_{23}\, p_2 \,, \\
& J_4 = u_{23}\, p_1 - u_{31}\, p_2 \quad , \quad J_5 = \omega_3\, p_3 \quad , \quad J_6 = \omega_1\, p_1 + \omega_2\, p_2 \,, \\
& J_7 = \omega_2\, p_1 - \omega_1\, p_2
\end{aligned}
$$

che sono lineari nelle componenti della polarizzazione. In totale si hanno dunque 18 invarianti che si possono chiamare *invarianti di rotazione* in quanto rimangono invariati qualunque sia l'angolo di rotazione α. Il potenziale degli sforzi interni conterrà quindi 18 coefficienti costanti dipendenti dalle proprietà elastiche e dalle proprietà di polarizzazione del mezzo. In assenza di rotazione degli elementi di volume ($\omega_i = 0$), gli invarianti si riducono a nove e nel caso più particolare di mezzi non polarizzabili, si riducono ulteriormente a cinque.

3. Invarianti ciclici

Occorre ora considerare, per i mezzi cristallini dotati di un asse di simmetria, gli invarianti corrispondenti a valori particolari di α, invarianti che chiameremo *ciclici*.

Oltre alle combinazioni (2.3) e (2.5), che ci hanno portato agli invarianti (2.4) e (2.6), dovremo ora formare le nuove combinazioni

$$
\begin{aligned}
(3.1)\quad (a\cdot a)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})^2 = e^{4i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})^2 \,, \\
(a\cdot b)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})(u'_{11} + u'_{22}) = e^{2i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})(u_{11} + u_{22}) , \\
(a\cdot d)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})\, u'_{33} = e^{2i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})\, u_{33} \,, \\
(a\cdot c)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})(u'_{31} + iu'_{23}) = e^{3i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})(u_{31} + iu_{23}) , \\
(c\cdot c)\quad & (u'_{31} + iu'_{23})^2 = e^{2i\alpha} (u_{31} + iu_{23})^2 \,, \\
(a\cdot e)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})(\omega'_1 + i\omega'_2) = e^{3i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})(\omega_1 + i\omega_2) , \\
(a\cdot f)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})\, \omega'_3 = e^{2i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})\, \omega_3 \,, \\
(c\cdot e)\quad & (u'_{31} + iu'_{23})(\omega'_1 + i\omega'_2) = e^{2i\alpha} (u_{31} + iu_{23})(\omega_1 + i\omega_2) \,, \\
(e\cdot e)\quad & (\omega'_1 + i\omega'_2)^2 = e^{2i\alpha} (\omega_1 + i\omega_2)^2 \,, \\
(a\cdot g)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})(p'_1 + ip'_2) = e^{3i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})(p_1 + ip_2) \,, \\
(a\cdot h)\quad & (u'_{11} - u'_{22} + iu'_{12})\, p'_3 = e^{2i\alpha} (u_{11} - u_{22} + iu_{12})\, p_3 \,, \\
(c\cdot g)\quad & (u'_{31} + iu'_{23})(p'_1 + ip'_2) = e^{2i\alpha} (u_{31} + iu_{23})(p_1 + ip_2) \,,
\end{aligned}
$$

dove sono escluse quelle non lineari nelle componenti del vettore polarizzazione.

Si tratta ora di cercare tutti gli invarianti che possono risultare dalle relazioni precedenti quando si faccia $\alpha = 2\pi/n$ e si attribuiscano ad n i valori $2, 3, 4, \cdots$, tali che i fattori esponenziali si riducano all'unità.

Per $n = 2$, e quindi $\alpha = \pi$, questo avviene nelle relazioni $(a \cdot a)$, $(a \cdot b)$, $(a \cdot d)$, $(c \cdot c)$, $(a \cdot f)$, $(c \cdot e)$, $(e \cdot e)$, $(a \cdot h)$, $(c \cdot g)$, le quali risultano complesse per cui ciascuna di esse si scinde in due, dando luogo ai seguenti invarianti reali

$$(3.2)\quad \begin{aligned} &i_1 = (u_{11} - u_{22})^2 - u_{12}^2 \quad , \quad i_3 = u_{11}^2 - u_{22}^2 \quad , \quad i_5 = (u_{11} - u_{22})\, u_{33} \, , \\ &i_2 = (u_{11} - u_{22})\, u_{12} \quad , \quad i_4 = (u_{11} + u_{22})\, u_{12} \quad , \quad i_6 = u_{12}\, u_{33} \, , \\ &i_7 = u_{31}^2 - u_{23}^2 \, , \; r_1 = (u_{11} - u_{22})\, \omega_3 \, , \; r_3 = u_{31}\, \omega_1 - u_{23}\, \omega_2 \, , \; r_5 = \omega_1^2 - \omega_2^2 \, , \\ &i_8 = u_{31}\, u_{23} \quad , \quad r_2 = u_{12}\, \omega_3 \quad , \quad r_4 = u_{23}\, \omega_1 + u_{31}\, \omega_2 \quad , \quad r_6 = \omega_1\, \omega_2 \, , \end{aligned}$$

$$(3.3)\quad \begin{aligned} &j_1 = (u_{11} - u_{22})\, p_3 \quad , \quad j_3 = u_{31}\, p_1 - u_{23}\, p_2 \, , \\ &j_2 = u_{12}\, p_3 \quad , \quad j_4 = u_{23}\, p_1 + u_{31}\, p_2 \, . \end{aligned}$$

Per $n = 3$ si ha $\alpha = (2/3)\,\pi$ e l'unico fattore esponenziale che si riduce all'unità è $e^{3i\alpha}$ che figura nelle relazioni $(a \cdot c)$, $(a \cdot e)$, $(a \cdot g)$. Da queste seguono quindi i seguenti invarianti

$$(3.4)\quad \begin{aligned} &i_9 = (u_{11} - u_{22})\, u_{31} - u_{12}\, u_{23} \quad , \quad r_7 = (u_{11} - u_{22})\, \omega_1 - u_{12}\, \omega_2 \, , \\ &i_{10} = (u_{11} - u_{22})\, u_{23} + u_{12}\, u_{31} \quad , \quad r_8 = (u_{11} - u_{22})\, \omega_2 + u_{12}\, \omega_1 \, , \end{aligned}$$

$$(3.5)\quad \begin{aligned} &j_5 = (u_{11} - u_{22})\, p_1 - u_{12}\, p_2 \, , \\ &j_6 = (u_{11} - u_{22})\, p_2 + u_{12}\, p_1 \, . \end{aligned}$$

Per $n = 4$ si ha $\alpha = (\pi/2)$ e si riduce all'unità il fattore esponenziale della sola $(a \cdot a)$. Ne seguono i due invarianti i_1, i_2 già ottenuti per $n = 2$. Per $n > 4$ si riconosce facilmente che non si trova più alcuna relazione invariante. Per i mezzi cristallini con un asse di simmetria e con simmetria ciclica di periodi $2, 3, 4$ intorno allo stesso asse, avremo quindi tre forme distinte di potenziale corrispondenti a questi periodi, corrispondenti cioè a *tre gruppi ciclici di rotazione* che indicheremo con C_2, C_3, C_4.

4. IL POTENZIALE DEGLI SFORZI PER I GRUPPI C_2, C_3, C_4

1) Per *il gruppo* C_2 agli invarianti di rotazione (2.4) e (2.6) occorre associare gli invarianti ciclici (3.2) e (3.3) e in totale si hanno 36 invarianti. Il potenziale corrispondente conterrà 36 coefficienti costanti.

Osserviamo che combinando opportunamente gli invarianti di rotazione I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 cogli invarianti ciclici i_1, i_3, i_5, i_7, ad essi si possono sostituire i seguenti

$$(3.6)\quad \begin{aligned} &I_1' = u_{11}^2 \quad , \quad I_2' = u_{22}^2 \quad , \quad I_3' = u_{33}^2 \quad , \quad I_4' = u_{12}^2 \quad , \quad I_5' = u_{23}^2 \quad , \quad I_6' = u_{31}^2 \, , \\ &I_7' = u_{11}\, u_{22} \quad , \quad I_8' = u_{22}\, u_{33} \quad , \quad I_9' = u_{33}\, u_{11} \, . \end{aligned}$$

Così pure agli invarianti i_2, i_4 possiamo sostituire i seguenti

$$(3.7) \qquad I'_{10} = \tfrac{1}{2}(i_2 + i_4) = u_{11} u_{12} \quad , \quad I'_{11} = \tfrac{1}{2}(i_4 - i_2) = u_{22} u_{12}$$

ed a questi vanno aggiunti gli invarianti

$$(3.8) \qquad I'_{12} = i_6 = u_{12} u_{33} \quad , \quad I'_{13} = i_8 = u_{31} u_{23} .$$

Analogamente con opportune combinazioni agli invarianti R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 possiamo sostituire i seguenti

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} &R'_1 = \omega_1^2 \ , \ R'_2 = \omega_2^2 \ , \ R'_3 = \omega_3^2 \ , \ R'_4 = u_{11}\,\omega_3 \ , \ R'_5 = u_{22}\,\omega_3 \, , \\ &R'_6 = r_6 = \omega_1\,\omega_2 \ , \ R'_7 = u_{31}\,\omega_1 \ , \ R'_8 = u_{23}\,\omega_2 \ , \ R'_9 = u_{23}\,\omega_1 \, , \\ &R'_{10} = u_{31}\,\omega_2 \quad , \quad R'_{11} = R_3 = u_{33}\,\omega_3 \quad , \quad R'_{12} = r_2 = u_{12}\,\omega_3 . \end{aligned}$$

Infine dalla combinazione degli invarianti J_1, J_2, J_3, J_4 cogli invarianti j_1, j_2, j_3, j_4 si hanno i seguenti invarianti

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} &J'_1 = u_{31}\,p_1 \ , \ J'_2 = u_{23}\,p_2 \ , \ J'_3 = u_{11}\,p_3 \ , \ J'_4 = u_{22}\,p_3 \, , \\ &J'_5 = u_{23}\,p_1 \ , \ J'_6 = u_{31}\,p_2 \ , \ J'_7 = j_2 = u_{12}\,p_3 \ , \ J'_8 = J_1 = u_{33}\,p_3 \, , \end{aligned}$$

ai quali vanno aggiunti gli invarianti

$$(3.11) \qquad J_5 = \omega_3\,p_3 \quad , \quad J_6 = \omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2 \quad , \quad J_7 = \omega_2\,p_1 - \omega_1\,p_2 .$$

Concludendo per i mezzi cristallini del gruppo C_2 il potenziale W_e degli sforzi elastici Φ_{ik} sarà la combinazione lineare a coefficienti costanti dei venticinque invarianti

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} &u_{11}^2 , u_{22}^2 , u_{33}^2 , u_{12}^2 , u_{23}^2 , u_{31}^2 , u_{11}\,u_{22} , u_{22}\,u_{33} , u_{33}\,u_{11} , u_{11}\,u_{12} , \\ &\quad u_{22}\,u_{12} , u_{33}\,u_{12} , u_{31}\,u_{23} , \\ &\omega_1^2 , \omega_2^2 , \omega_3^2 , u_{11}\,\omega_3 , u_{22}\,\omega_3 , \omega_1\,\omega_2 , u_{31}\,\omega_1 , u_{23}\,\omega_1 , u_{23}\,\omega_2 , \\ &\quad u_{31}\,\omega_2 , u_{33}\,\omega_3 , u_{12}\,\omega_3 , \end{aligned}$$

mentre il potenziale W_p degli sforzi Π_{ik} di polarizzazione sarà la combinazione lineare a coefficienti costanti degli undici invarianti

$$(3.13) \qquad \begin{aligned} &u_{31}\,p_1 , u_{23}\,p_2 , u_{11}\,p_3 , u_{22}\,p_3 , u_{23}\,p_1 , u_{31}\,p_2 , u_{12}\,p_3 , u_{33}\,p_3 , \\ &\quad \omega_3\,p_3 , \omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2 , \omega_2\,p_1 - \omega_1\,p_2 . \end{aligned}$$

I corrispondenti sforzi per il gruppo C_2 saranno dati dalle (3.4) della Nota I.

2) Per il *gruppo* C_3 gli invarianti con cui sarà formato il potenziale W_e delle forze elastiche sono gli undici espressi dalle (2.4) ed i quattro espressi dalle (3.4). W_e conterrà pertanto quindici coefficienti costanti.

Gli invarianti di cui sarà composto il potenziale W_p delle forze di polarizzazione saranno invece quelli espressi dalle (2.6) e (3.5) che sono in totale nove. W_p conterrà quindi nove costanti.

3) Infine per il *gruppo* C_4 il potenziale degli sforzi elastici sarà la combinazione a coefficienti costanti degli undici invarianti di rotazione (2.4) e dei due invarianti i_1, i_2 dati dalle (3.2).

Agli invarianti I_1, I_4, i_1 si possono sostituire i seguenti

$$u_{11}^2 + u_{22}^2 \quad , \quad u_{11}\, u_{22} \, , \, u_{12}^2 \, . \tag{3.14}$$

Il potenziale W_e sarà composto in questo caso da tredici invarianti e conterrà quindi tredici costanti. Il potenziale W_p sarà invece composto dai sette invarianti (2.6).

5. I GRUPPI CICLICI D_2, D_3, D_4 E LORO INVARIANTI

Oltre al caso in cui esiste un asse di isotropia e oltre ai tre gruppi C_2, C_3, C_4 corrispondenti a rotazioni di periodo 2, 3, 4 intorno ad un asse di simmetria, esistono altri tre gruppi diedrici, che indicheremo con D_2, D_3, D_4, i quali si possono generare aggiungendo ai gruppi ciclici C_2, C_3, C_4 una rotazione di un angolo π intorno ad un asse n normale all'asse di simmetria del gruppo ciclico corrispondente.

Se prendiamo come asse n l'asse x_1 si riconosce che per tale rotazione si ha la seguente sostituzione nelle componenti di deformazione e di polarizzazione

$$\begin{pmatrix} u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{23}, u_{31}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, p_1, p_2, p_3 \\ u_{11}, u_{22}, u_{33}, -u_{12}, u_{23}, -u_{31}, \omega_1, -\omega_2, -\omega_3, p_1, -p_2, -p_3 \end{pmatrix}.$$

Si può perciò passare dagli invarianti dei gruppi C_2, C_3, C_4 a quelli corrispondenti D_2, D_3, D_4, scegliendo tra i primi quelli che restano invarianti cambiando

$$u_{12} \quad , \quad u_{31} \quad , \quad \omega_2 \quad , \quad \omega_3 \quad , \quad p_2 \quad , \quad p_3$$

in

$$-u_{12} \quad , \quad -u_{31} \quad , \quad -\omega_2 \quad , \quad -\omega_3 \quad , \quad -p_2 \quad , \quad -p_3 \, .$$

Per il *gruppo* D_2 godono di questa proprietà gli invarianti

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \quad ; \quad R_1, R_2, R_6 \quad ; \quad J_4, J_5, J_6 \, ;$$

$$i_1, i_3, i_5, i_7 \quad ; \quad r_2, r_4, r_5 \quad ; \quad j_2, j_4 \, .$$

Combinando opportunamente i nove invarianti

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \quad ; \quad i_1, i_3, i_5, i_7 \, ,$$

si possono ottenere altrettanti invarianti sotto la forma simmetrica seguente:

$$u_{11}^2 \,,\ u_{22}^2 \,,\ u_{33}^2 \,,\ u_{22}\,u_{33} \,,\ u_{33}\,u_{11} \,,\ u_{11}\,u_{22} \,,\ u_{23}^2 \,,\ u_{31}^2 \,,\ u_{12}^2 \,.$$

Analogamente R_1, R_2, r_5 equivalgono agli invarianti

$$\omega_1^2 \,,\ \omega_2^2 \,,\ \omega_3^2 \,.$$

Per il *gruppo* D_3 godono della stessa proprietà gli invarianti

$$I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 \quad ; \quad R_1 , R_2 , R_6 \quad ; \quad J_4 , J_5 ; J_6 \quad ; \quad i_{10} \quad ; \quad r_7 \quad ; \quad j_5 \,.$$

Infine per il *gruppo* D_4 si hanno gli invarianti

$$I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 \quad ; \quad R_1 , R_2 , R_6 \quad ; \quad J_4 , J_5 , J_6 \quad ; \quad i_1 \,.$$

6. Invarianti del gruppo T del tetraedro

Oltre ai gruppi C_2 , C_3 , C_4 ; D_2 , D_3 , D_4 ne esiste ancora uno detto del *tetraedro* [3]. Esso si può ottenere aggiungendo al gruppo D_2 le rotazioni attorno ad un asse ternario disposto simmetricamente rispetto ai tre assi ortogonali di D_2. Se prendiamo quest'asse ternario nel triedro positivo degli assi x_1 , x_2 , x_3 le rotazioni intorno a quest'asse hanno per effetto una permutazione delle coordinate x_1 , x_2 , x_3 e quindi anche delle componenti u_1 , u_2 , u_3 dello spostamento $\boldsymbol{u}$.

Ne segue che gli invarianti del gruppo T del tetraedro non possono avere che le seguenti espressioni

$$\begin{array}{rcl} u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 & , & \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \,, \\ u_{22}\,u_{33} + u_{33}\,u_{11} + u_{11}\,u_{22} & , & u_{23}\,\omega_1 + u_{31}\,\omega_2 + u_{12}\,\omega_3 \,, \\ u_{23}^2 + u_{31}^2 + u_{12}^2 & , & u_{23}\,p_1 + u_{31}\,p_2 + u_{12}\,p_3 \,, \end{array}$$

e inoltre la somma

$$J_5 + J_6 = \omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2 + \omega_3\,p_3 \,.$$

Gli invarianti del gruppo T sono dunque sette e il potenziale corrispondente conterrà sette costanti.

(3) Cfr. C. Somigliana, *loco citato* in (1); Schoenflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur*, Leipzig, Teubner (1891).