
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

TONG VAN DUC

Connexions induites et classes caractéristiques

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.6, p. 513–517.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_513_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Connexions induites et classes caractéristiques.* Nota di TONG VAN DUC, presentata^(*) dal Socio E. MARTINELLI a nome del compianto Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Sia (P, M, G) un fibrato principale il cui gruppo strutturale ammetta un sottogruppo chiuso H della forma $H = H_1 \times H_2$. Si dimostra che se il fibrato (P, M, G) è fogliettato, allora il fibrato principale $(P/H_2, P/H, H_1)$ è lui pure fogliettato. Inoltre se la coppia (G, H) è riducibile, allora ogni connessione su (P, M, G) induce una connessione su $(P/H_2, P/H, H_1)$.

Si dimostra in seguito che, supposta basica la connessione su (P, M, G) , le classi di Pontryagin di $(P/H_2, P/H, H_1)$ sono nulle a partire da una certa dimensione.

Soit (P, M, G) un fibré principal de groupe structural G . On rappelle les notions suivantes dues à F. Kamber et Ph. Tondeur [3]:

DEFINITION. Une connexion partielle sur (P, M, G) est un sous-fibré vectoriel F de TP tel que:

- (i) $F_u \cap VP_u = 0, \forall u \in P$, où VP désigne le fibré vertical de P .
- (ii) $F_{ua} = (R_a)_* F_u, \forall u \in P$ et $\forall a \in G$.

Il résulte de la condition (ii) qui si l'on pose $L_x = p_* L_u$ où p est la projection de P sur M et où u est un élément de P tel que $p(u) = x$, on obtient un sous-fibré vectoriel L de TM .

Lorsque (P, M, G) est munie d'une connexion partielle, on peut définir le relèvement partiellement horizontal X^h d'un champ de vecteurs X de M .

DEFINITION. Une connexion partielle F sur (P, M, G) est dite plate si $\forall A, B \in F, [A, B] \in F$.

On remarque que si F est plate, le fibré vectoriel L est intégrable. En effet, soient X et Y deux sections de L et soient X^h et Y^h leurs relèvements horizontaux. Puisque $[X^h, Y^h] \in F$ et que $p_* [X^h, Y^h] = [X, Y]$, on a $[X, Y] \in L$.

DEFINITION. Une connexion sur un fibré principal (P, M, G) est dite adaptée à une connexion partielle F si quel que soit l'élément u de P , l'espace horizontal en u contient F_u .

DEFINITION. Une connexion ω sur (P, M, G) adaptée à une connexion partielle F est dite basique si $\theta_A \omega = 0, \forall A \in F$.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

Cette condition est équivalent à $i_A \Omega = 0, \forall A \in F$ où Ω est la forme de courbure de ω [3].

DEFINITION. *Un fibré principal est dit feuilleté s'il est muni d'une connexion partielle plate.*

PROPOSITION 1. *Soit (f, h, k) un morphisme d'un fibré principal (P, M, G) dans un autre fibré principal (P', M', G') tel que h soit un difféomorphisme de M sur M' et soit F une connexion partielle sur P . Alors, il existe une connexion partielle F' sur P' telle que $f_* F_u = F'_{f(u)}, \forall u \in P$.*

Preuve. Soit $v' \in P'$ et soit $u' \in f(P)$ tel que $p'(u') = p'(v'), p'$ étant la projection de P' sur M' . On a $u' = f(u)$ avec $u \in P$. Il existe $a' \in G'$ tel que $v' = u' a' = f(u) a'$. On pose $F'_{v'} = R_{a'} f_*(F_u)$. En utilisant le deuxième axiome d'une connexion partielle, on vérifie facilement que $F'_{v'}$ ne dépend ni de a' , ni de u . Soit $b' \in G'$; on a $v' b' = f(u) a' b'$; d'où $F'_{v' b'} = (R_{a' b'})_* f_*(F_u) = R_{b'} F'_{v'}$. D'autre part, soit $A' \in F_{u'} \cap VP'_{u'}$. Il existe $A \in F_u$ tel que $A' = R_{a'}(f_* A)$. Par suite $0 = p'_* A' = p'_* R_{a'} f_*(A) = p'_* f_*(A) = h_*(p_* A)$; puisque h est un difféomorphisme, on a $p_* A = 0$; A est donc vertical et égal au vecteur nul; d'où $A' = 0$.

Si le rang de F est égal à celui de TM i.e. si F est une connexion, alors F' est une connexion sur P' . On a ainsi démontré le:

COROLLAIRE. *Les hypothèses étant celles de la proposition, pour toute connexion sur P adaptée à F , son image par f est adaptée à la connexion partielle F' .*

On considère maintenant un fibré principal (P, M, G) et un sous-groupe fermé H de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, tel que l'espace homogène G/H soit réductif. Soit $\mathfrak{m}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie de G , tel que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

et

$$Ad(H) \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$

Soit π la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Alors, on a:

$$(1) \quad Ad(h) \circ \pi = \pi \circ Ad(h), \quad \forall h \in H.$$

On suppose de plus que $H = H_1 \times H_2$ et on note $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ les algèbres de Lie de H_1 et de H_2 ; ce qui donne une nouvelle décomposition de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{m}.$$

La projection canonique de G/H_2 sur G/H induit une submersion de $P/H_2 = P_1$ sur $P/H = V$ et (P_1, V, H_1) est un espace fibré principal de groupe structural H_1 . A la projection de G sur G/H correspond un morphisme f_1 de (P, V, H) sur (P_1, V, H_1) .

Soit ω une connexion sur (P, M, G) . Alors $\omega' = \pi \circ \omega$ définit une connexion sur (P, V, H) comme il est facile de le constater en utilisant la relation (1). L'image de la connexion définie par ω' par le morphisme f_1 est une connexion sur (P_1, V, H_1) .

On appellera connexion induite par ω sur (P_1, V, H_1) la connexion ainsi obtenue et on désignera par ω_1 sa forme de connexion.

Soient $\Omega, \Omega', \Omega_1$ les formes de courbure de ω, ω' et ω_1 . Soit $\varphi = \omega - \omega'$; φ est une forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{m}$. On en déduit:

$$d\omega = d\omega' + d\varphi$$

et

$$\begin{aligned}\Omega &= d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \\ &= d\omega' + d\varphi + \frac{1}{2} [\omega', \omega'] + \frac{1}{2} [\varphi, \varphi] + [\omega', \varphi] \\ &= \Omega' + d\varphi + \frac{1}{2} [\varphi, \varphi] + [\omega', \varphi]\end{aligned}$$

d'où:

$$\Omega' = \pi \circ \Omega - \frac{1}{2} \pi \circ [\varphi, \varphi].$$

Comme $f_1^* \omega_1 = p_1 \circ \omega'$ où p_1 est la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}_1$, on a:

$$f_1^* \Omega_1 = p_1 \circ \Omega' = p_1 \circ \pi \circ \Omega - \frac{1}{2} p_1 \circ \pi \circ [\varphi, \varphi].$$

En désignant par π_1 la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}_1$, on obtient la formule:

$$(2) \quad f_1^* \Omega_1 = \pi_1 \circ \Omega - \frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi].$$

Un exemple de connexion induite est fourni par l'étude des sous-variétés d'une variété riemannienne.

Soit M une sous-variété de dimension m d'une variété riemannienne (N, g) de dimension $m+n$. On notera encore g la métrique induite sur M . Soient $(O(N), N, O(m+n))$ et $(O(M), M, O(m))$ les fibrés des repères orthonormés de N et de M . L'ensemble des repères comprenant m vecteurs tangents orthonormés de N constitue un fibré principal isomorphe à $(O(N)/O(n), N, O(m))$. De même, le fibré $(O(N)/O(m) \times O(n), N)$ s'interprète comme le fibré des m -plans tangents de la variété N . Soient $(e_1, \dots, e_{m+n})$ la base canonique de $\mathbf{R}^{m+n}$. On considérera $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$ comme des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{m+n}$ engendrés respectivement par $(e_1, \dots, e_m)$ et $(e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$. Soit $u = (X_1, \dots, X_{m+n})$ un repère orthonormé de N d'origine x , alors $f_1(u) = (X_1, \dots, X_m)$. Si l'on considère u comme un isomorphisme de $\mathbf{R}^{m+n}$ sur $T_x N$, $f_1(u)$ sera un isomorphisme de $\mathbf{R}^m$ sur le m -plan tangent à N engendré par $X_1, \dots, X_m$. On a un morphisme (η, t) de $(O(M), M, O(m))$ dans $(O(N)/O(n), O(N)/O(m) \times O(n), O(m))$ qui au repère v de M au point x fait correspondre le m -repère $\eta(u)$ de N situé au-dessus du m -

plan tangent $t(x)$ engendré par $\eta(u)$. D'où les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & O(N)/O(n) & \xleftarrow{\eta} & O(M) \\
 & \nearrow f_1 & \downarrow & & \downarrow \\
 O(N) & \longrightarrow & O(N)/O(m) \times O(n) & \xleftarrow{t} & M \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 N & \xrightarrow{id} & N & & \\
 \\
 O(N) & \xrightarrow{f_1} & O(N)/O(n) & \xleftarrow{\eta} & O(M) \\
 \downarrow & & \downarrow r_1 & & \downarrow \\
 N & \xrightarrow{id} & N & \xleftarrow{i} & M
 \end{array}$$

Soient Θ et θ les formes canoniques de $O(N)$ et $O(M)$. Sur $O(N)/O(n)$; il existe une forme canonique Θ_1 définie par:

$$\Theta_1(A) = u^{-1}(\beta(r_1^*A)), \quad \forall A \in T_u(O(N)/O(n))$$

où β désigne la projection orthogonale de $T_{r_1(u)}N$ sur le m -plan tangent défini par u . Il est évident que:

$$(3) \quad \eta^* \Theta_1 = \theta \quad \text{et} \quad f_1^* \Theta = \Theta_{\mathbf{R}^m}$$

où $\Theta_{\mathbf{R}^m}$ est la $\mathbf{R}^m$ -composante de la forme canonique Θ .

Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{o}(m+n)$ et soit $\mathfrak{m}$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{o}(m) + \mathfrak{o}(n)$ par rapport à B . On a:

$$\mathfrak{o}(m+n) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{m}$$

et

$$Ad(O(m) \times O(n)) \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$

Par suite, $O(m) \times O(n)$ est réductif dans $O(m+n)$ et la connexion riemannienne ω sur $O(N)$ induit une connexion ω_1 sur $(O(M)/O(n), O(M)/O(m) \times O(n), O(m))$. La connexion ω_1 permet de retrouver la connexion riemannienne de (M, g) . Soit $\tilde{\omega}$ l'image réciproque de ω par le morphisme η qui est un isomorphisme sur les fibrés.

PROPOSITION 2. $\tilde{\omega}$ est la connexion riemannienne de (M, g) .

Preuve. Il suffit de vérifier que $\tilde{\omega}$ est sans torsion. On a:

$$(4) \quad \tilde{\omega} = \eta^* \omega_1 \quad \text{et} \quad f_1^* \omega_1 = \omega_{\mathfrak{o}(m)} = \pi_1^* \omega.$$

Puisque ω est sans torsion:

$$(5) \quad d\Theta = -\omega \wedge \Theta.$$

Comme f_1 est surjectif, les formules (3), (4) et (5) impliquent

$$d\theta = -\tilde{\omega} \wedge \theta.$$

On revient au cas général d'un fibré principal (P, M, G) et d'un sous-groupe fermé $H = H_1 \times H_2$ de G tel que G/H soit réductif. On suppose en outre que (P, M, G) est feuilleté par une connexion partielle plate F . D'après la Proposition 1, le fibré (P_1, V, H_1) est feuilleté par F_1 , image de F par f_1 . De plus si ω est une connexion adaptée à F , la connexion induite ω_1 est adaptée à ω_1 .

Soit $f \in I^k(H_1)$, l'espace vectoriel des formes k -linéaires symétriques sur $\mathfrak{h}_1$, invariantes par $\text{Ad}(H_1)$. Puisque f_1 est surjectif, on voit, d'après la formule (2) que $f(\Omega_1^k)$ est parfaitement déterminée par:

$$f((\pi_1 \circ \Omega - \frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^k) = \sum_{i+j=k} f((\pi_1 \circ \Omega)^i \wedge (-\frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^j).$$

Il existe une valeur j_0 de j tel que $(\pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^j \equiv 0$ pour $j > j_0$. On remarque que $j_0 \leq [\frac{1}{2} \dim G/H]$. Si la connexion ω est basique, $(\Omega)^i \equiv 0$ pour $i > [q/2]$ et par suite $f(\Omega_1^k) \equiv 0$ pour $k > [q/2] + j_0$, où q est la codimension de F . On a donc établi le

THÉOREME. *Si le fibré feuilleté (P, M, G) est muni d'une connexion basique, les classes de Pontrjagin du fibré feuilleté (P_1, V, H_1) sont nulles en dimension supérieure à $[q/2] + j_0$.*

REFERENCES

- [1] G. GIRAUD (1975) - *Connexions subordonnées et classes caractéristiques*, « Rev. Roum. Math. Pures et Appl. », 20 (8), 917-925.
- [2] A. GOETZ (1964) - *On induced connections*, « Fundamenta Math. », 55, 149-174.
- [3] F. KAMPER et PH. TONDEUR (1975) - *Foliated Bundles and Characteristic Classes*, « Lectures notes », 493, Springer, Berlin.
- [4] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU (1963) - *Fondations of Differential Geometry*, Vol. I (1963), Vol. II (1969), Interscience, New-York.