Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

André Batbedat

Des dualités pour les préanneaux booléens

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.6, p. 483–487.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_483_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 dicembre 1977

Presiede il Presidente della Classe ANTONIO CARRELLI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Des dualités pour les préanneaux booleens.* Nota II di ANDRÉ BATBEDAT, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si studiano certi aspetti funtoriali della nozione di spettro di un preanello booleano, presentata in [1].

INTRODUCTION

Cette Note est la suite directe de [1] dont elle utilise les notations et propriétés. Dans le prolongement de la dualité de Stone pour les anneaux booleens, nous établissons des équivalences entre certaines catégories de préanneaux booleens et certaines catégories d'espaces topologiques.

V. LA CATÉGORIE EPB

Soit Y un espace topologique non vide et $\mathscr{C}$ l'ensemble de ses ouverts quasi-compacts, ϕ étant exclu lorsque Y est irréductible a plus d'un élément. $\mathscr{C}$ est stable pour la réunion finie.

On dit que Y est un *espace prébooleen* si Y est accessible et $\mathscr{C}$ constitue une base stable pour l'intersection finie et le complément relatif.

Soit θ une application de Y′ vers Y avec pour bases respectives $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$: on dit que θ est *continue-quasi-compacte* si pour tout $\alpha \in \mathscr{C}$, $\theta^{-1}(\alpha) \in \mathscr{C}'$. On définit la catégorie EPB des espaces prébooleens en prenant pour morphismes les applications continues-quasi-compactes.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

Soit Y un objet de EPB: $\mathscr{C}$ est un sous–objet de $\mathscr{P}$ (Y) dans la catégorie TDRC donc aussi dans la catégorie PB. Le préanneau booleen $\mathscr{C}$ est unitaire ssi Y est quasi–compact (car $\mathscr{C}$ est une base); il est avec zéro ssi ϕ est dans $\mathscr{C}$ (car Y est accessible) et alors les éléments de $\mathscr{C}$ sont les ofs compacts. Pour $y \in$ Y, on note $\tilde{y}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}$ qui ne contiennent pas y.

PROPOSITION V.1. *Les idéaux maximaux de* $\mathscr{C}$ *sont les* $\tilde{y}$.

Preuve. $\tilde{y}$ est un idéal premier donc maximal (Proposition II.5). Réciproquement soit u un idéal maximal de $\mathscr{C}$ et ε la réunion des éléments de u: si ε est distinct de Y, u est contenu dans un $\tilde{y}$ donc lui est égal; si $\varepsilon =$ Y, tout élément α de $\mathscr{C}$ est recouvert par une famille d'éléments de u, donc par une sous–famille finie, donc il est dans u, par suite $u = \mathscr{C}$, ce qui est absurde.

PROPOSITION V.2. $\sim$ *est un isomorphisme de la catégorie* EPB *de* Y *vers* Spec ($\mathscr{C}$).

Preuve. Par la Proposition V.1, $\sim$ est surjective; elle est injective car Y est accessible. Enfin l'image de l'élément α de la base $\mathscr{C}$ est B (α) dans Spec ($\mathscr{C}$).

$\mathscr{C}$ est encore noté Oqc (Y). Soit θ un morphisme de EPB de Y′ vers Y: on note Oqc (θ) l'application de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}'$ qui envoie chaque α de $\mathscr{C}$ sur $\theta^{-1}(\alpha)$.

PROPOSITION V.3. Oqc *est un foncteur contravariant de* EPB *vers* PB.

Preuve. Oqc (θ) qui respecte l'intersection et la réunion est un morphisme de TDRC donc aussi de PB. L'image de l'application identique est l'application identique et Oqc renverse la composition des morphismes.

VI. PREMIERE ÉQUIVALENCE DES CATÉGORIES

Un *morphisme* Ψ de la catégorie PB, de P vers P′, est dit *strict* lorsque pour tout idéal maximal x' de P′, Ψ (P) recontre x' et P′ $- x'$. Par exemple, tout morphisme surjectif est strict.

LEMME VI.1. *Si* Ψ *est un morphisme strict de* P *vers* P′ *et* x' *un idéal maximal de* P′, $\Psi^{-1}(x')$ *est un idéal maximal de* P.

Preuve. $\Psi^{-1}(x')$ est un idéal premier donc maximal.

Il est clair alors que les morphismes stricts de PB en constituent une sous–catégorie: on la note PBS.

LEMME VI.2. *Le foncteur* Oqc *est à valeurs dans* PBS.

Preuve. Soit θ un morphisme de EPB de Y′ vers Y, $\tilde{y}'$ un idéal maximal de $\mathscr{C}'$ et $y = \theta(y')$: il existe $\alpha \in \mathscr{C}$ avec $y \in \alpha$ donc $\theta^{-1}(\alpha) \in \mathscr{C}' - \tilde{y}'$.

Ensuite si y est le seul élément de Y, $\phi \in \mathscr{C}$ donc $\phi = \theta^{-1}(\phi)$, qui est dans $\mathscr{C}'$, est dans $\tilde{y}'$; sinon il existe $\beta \in \mathscr{C}$ avec $y \notin \beta$ (car Y est accessible) donc $\theta^{-1}(\beta) \in \tilde{y}'$.

Soit Ψ un morphisme de PBS, de P vers P′: on note Spec (Ψ) l'application du Lemme VI.1: $x' \in \mathrm{Spec}(P') \to x = \psi^{-1}(x') \in \mathrm{Spec}(P)$.

PROPOSITION VI.3. Spec *est un foncteur contravariant de* PBS *vers* EPB.

Preuve. Pour tout a de la source de Ψ, l'image réciproque de $B(a)$ par Spec (Ψ) est $B(\Psi(a))$.

THÉORÈME VI.4. *Les catégories* PBS *et* EPB *sont équivalentes.*

Preuve. Nous montrons que les foncteurs Spec et Oqc sont réciproques: partant de P, on obtient Spec (P) puis $\mathscr{B}$ par Oqc; soit Ψ de P vers P′ et $\theta = \mathrm{Spec}(\Psi)$: quand on identifie P à $\mathscr{B}$ et P′ a $\mathscr{B}'$ par l'isomorphisme μ du III, Oqc (θ) s'identifie à Ψ car l'image réciproque de $B(a)$ par θ est $B(\Psi(a))$. Partant de Y on obtient $\mathscr{C}$ puis Spec ($\mathscr{C}$); soit θ de Y′ vers Y et $\Psi = \mathrm{Oqc}(\theta)$: quand on identifie Y à Spec ($\mathscr{C}$) et Y′ à Spec ($\mathscr{C}'$) par l'isomorphisme $\sim$ du V, Spec (Ψ) s'identifie à θ car l'image réciproque de $\tilde{y}'$ par Ψ est $\widetilde{\theta(y')}$.

VII. LE FONCTEUR $\mathscr{T}$

A chaque objet Y de la catégorie EPB on associe le triplet $Z = (\pi, Y, \Pi)$ où π et Π sont des points supplémentaires distincts, puis l'ensemble $\mathscr{D}$ des $\varepsilon \cup \{\pi\}$ pour ε parcourant $\mathscr{C}$ et on munit Z de la topologie engendrée par $\mathscr{D}$.

On note T la catégorie suivante: les objets sont les espaces Z précédents; un morphisme θ de Z′ vers Z est une application telle que pour tout $\alpha \in \mathscr{D}$, $\theta^{-1}(\alpha) \in \mathscr{D}'$ (θ^{-1} respecte les ouverts propres quasi-compacts).

L'objet $\mathscr{D}$ de PB directement issu de $\mathscr{C}$ par la bijection

$$\sigma : \varepsilon \in \mathscr{C} \to \varepsilon \cup \{\pi\} \in \mathscr{D},$$

est encore noté $\mathscr{C}(Z)$; pour le morphisme θ de Z′ vers Z, l'application: $\alpha \in \mathscr{D} \to \theta^{-1}(\alpha) \in \mathscr{D}'$, est notée $\mathscr{T}(\theta)$.

PROPOSITION VII.1. $\mathscr{T}$ *est un foncteur contravariant de* T *vers* PB.

Preuve. Comme à la Proposition V.3.

VIII. DEUXIEME ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES

A l'objet P de PB on associe l'idéal vide ω et l'idéal plein Ω et pour chaque $a \in P$, on pose $D(a) = B(a) \cup \{\omega\}$; on note $\mathrm{Spec}_0^1(P)$ l'ensemble $\mathrm{Spec}(P) \cup \{\omega\} \cup \{\Omega\}$ muni de la topologie engendrée par l'ensemble des $D(a)$.

LEMME VIII.1. *Soit* Ψ *un morphisme de* PB *de* P *vers* P′ *et*

$$x' \in \mathrm{Spec}_0^1(\mathrm{P}') : x = \Psi^{-1}(x') \in \mathrm{Spec}_0^1(\mathrm{P}) .$$

On note $\mathrm{Spec}_0^1(\Psi)$ l'application: $x' \to x$, de ce Lemme.

PROPOSITION VIII.2. Spec_0^1 *est un foncteur contravariant de* PB *vers* T.

Preuve. L'image réciproque de D (a) par $\mathrm{Spec}_0^1(\Psi)$ est D $(\Psi(a))$.

Soit $Z = (\pi, Y, \Pi)$ un objet de T: l'isomorphisme σ de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ donne lieu à l'isomorphisme Spec (σ) de Spec $(\mathscr{D})$ vers Spec $(\mathscr{C})$ et par la Proposition V.2 on obtient un isomorphisme de Y vers Spec $(\mathscr{D})$ encore noté $\sim$; il s'étend canoniquement en un isomorphisme de Z vers $\mathrm{Spec}_0^1(\mathscr{D})$: $\tilde{z}$ est l'ensemble des α de $\mathscr{D}$ ne contenant pas z.

THÉORÈME VIII.3. *Les catégories* PB *et* T *sont équivalentes.*

Preuve. On montre comme pour le Théorème VI.4 que les foncteurs Spec_0^1 et $\mathscr{T}$ sont réciproques.

IX. COMPLEMENTS

PBS est une sous-catégorie de PB.

Le foncteur naturel (covariant) de EPB vers T s'obtient par composition de Oqc puis Spec_0^1.

Un morphisme Ψ de PB, de P vers P′, est strict ssi l'image réciproque de ω [resp: Ω] par $\mathrm{Spec}_0^1(\Psi)$ est ω' [resp: Ω').

La catégorie ABU des anneaux booleens unitaires est une sous-catégorie pleine de PBS: en effet il est clair que tout morphisme de ABU est dans PBS; d'autre part si Ψ est un morphisme de PBS entre deux objets de ABU, l'image du zéro [resp: neutre] est le plus petit [resp: grand] élément de l'image de la source et ceci, compte tenu de la Proposition II.2, entraîne que Ψ est dans ABU. La catégorie image de ABU par le foncteur Spec est la catégorie EB des espaces booleens, sous-catégorie pleine de EPB des espaces compacts engendrés par leurs ofs: l'équivalence entre ABU et EB exprime la dualité de Stone.

La catégorie PBU des préanneaux booleens unitaires est une sous-catégorie non pleine de PB; ce n'est pas une sous-catégorie de PBS; ABU est une sous-catégorie non pleine de PBU. L'image de PBU par Spec_0^1 est la sous-catégorie de T suivante: pour un objet $Z = (\pi, Y, \Pi)$, Y est quasi-compact et pour un morsphime θ, de Z′ vers Z, l'image réciproque de Π est Π'; ainsi on peut oublier le point Π pour chaque objet Z′ d'où, pour PBU, une catégorie particulière d'espaces topologiques (obtenue par adjonction à Y du seul point π) et le foncteur Spec_0 associé.

De même pour la catégorie AB des anneaux booleens (non nécessairement unitaires) on peut oublier π et définir le foncteur Spec [1].

Soit P un préanneau booleen unitaire sans zéro: P. Janin a construit (Proposition 28 de la Référence [4] de [1]) l'anneau booleen unitaire P′ libre pour P; P s'identifie dans P′ au complémentaire d'un idéal maximal z et il résulte de cette propriété universelle que la correspondance par traces entre les éléments de Spec (P′) — $\{z\}$ et ceux de Spec (P), est biunivoque. Alors Spec (P) s'identifie à l'espace Spec (P′) — $\{z\}$ pour lequel les ouverts sont les traces des ouverts de Spec (P′), qui contiennent z; on peut dire aussi que Spec (P′) s'identifie à l'espace sur Spec_0 (P) dont la topologie est engendrée par les D (a) et leurs complémentaires.

REFERENCE

[1] A. BATBEDAT - *Le spectre d'un préanneau booleen*, Nota I, «Atti Acc. Naz. dei Lincei».