Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Vacca

Sulle equazioni del moto di un mezzo dielettrico perfettamente elastico e polarizzabile soggetto a un campo magnetico costante

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.5, p. 391–398.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_5_391_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Magnetofluidodinamica. — *Sulle equazioni del moto di un mezzo dielettrico perfettamente elastico e polarizzabile soggetto a un campo magnetico costante* (*). Nota I di MARIA TERESA VACCA, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper the small motions of a perfectly elastic dielectric medium, electrically polarizable, subject to external uniform magnetic field are considered. For the problem to be determined, the Maxwell-Hertz ordinary electromagnetic equations must be supplemented by an equation which the analogy with the Ohm's law for moving electric conductors may suggest. This equation is different from that which some Authors by other assumptions have written, but it is included in the more general Voigt's constitutive relation. Supposing that the magnetic field gives rise to dissymmetry of the internal stress, elastic and piezoelectric stress, the dynamical equations are determined and the case in which the potential of these stresses exist is considered.

1. EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Osserviamo intanto che per effetto del campo magnetico applicato e della polarizzazione si determinerà nel mezzo dielettrico un campo elettromagnetico. Le equazioni di Maxwell-Hertz che esprimono le relazioni tra il campo magnetico e la distribuzione di cariche e correnti in un tale mezzo sono [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad , \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \, , \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \, , \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \, , \tag{1.2}$$

dove

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} + \boldsymbol{v} \wedge \mathbf{P} \quad , \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{1.3}$$

e nelle quali $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{v}$ sono i vettori che rappresentano rispettivamente l'induzione magnetica, il campo elettrico, la polarizzazione dielettrica e la velocità di un punto del mezzo, mentre ε_0 e μ_0 sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 18 novembre 1977.

(1) Cfr. R. A. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, «Int. J. Engng. Sci.», *1* (1) (1963).

Scrivendo la $(1.2)_1$ nella forma

$$\text{rot}\,\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\,(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v}) + \frac{\partial\,(\varepsilon_0\,\mathbf{E})}{\partial t} \tag{1.4}$$

questa mostra che il vettore

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\,(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v}) \tag{1.5}$$

rappresenta la *densità di corrente di polarizzazione*. Così pure la $(1.2)_2$ equivale alla

$$\text{div}\,(\varepsilon_0\,\mathbf{E}) = -\,\text{div}\,\mathbf{P} \tag{1.6}$$

e quindi

$$\rho_p = -\,\text{div}\,\mathbf{P} \tag{1.7}$$

rappresenta la *densità delle cariche elettriche di polarizzazione.*

Un'equazione da aggiungere al sistema di equazioni (1.1), (1.2), (1.3), necessaria, come vedremo, per rendere determinato il problema di moto, si può ottenere ammettendo che per i dielettrici polarizzati sussista una legge analoga a quella di Ohm per i conduttori in movimento, espressa, in virtù della (1.5), da

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\,(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v}) = \eta\,(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B} - \chi^{-1}\,\mathbf{P})\,, \tag{1.8}$$

dove η è analogo al coefficiente di conducibilità elettrica dei conduttori. Dalla (1.8) si ricava

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B} = \chi^{-1}\,\mathbf{P} + \eta^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\,(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v})\right] \tag{1.9}$$

che in assenza di moto, in conformità a quanto risulta nel caso statico, si riduce alla $\mathbf{E} = \chi^{-1}\,\mathbf{P}$, ovvero $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, essendo χ il coefficiente di suscettività dielettrica. La (1.9) differisce da quella stabilita in base ad altre ipotesi da Toupin nel lavoro citato, ma rientra come caso particolare in una formula più generale assegnata da Voigt [2].

È opportuno osservare che ponendo

$$\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}\,, \tag{1.10}$$

dove $\mathbf{A}$ è il *potenziale vettore* del campo elettromagnetico, la $(1.1)_1$ diventa:

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E}\right) = 0\,.$$

(2) Cfr. W. VOIGT, *Zur Theorie der magneto-optischen Erscheinungen*, « Ann. der Phys. », 67, 345–365 (1899).

Esiste pertanto un *potenziale scalare* V per cui

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \tag{1.11}$$

Sostituendo nella $(1.2)_1$ si ottiene facilmente per il potenziale vettore **A** l'equazione

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta_2 \mathbf{A} = \mu_0 \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v})\right] - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{1.12}$$

dove $c^2 = (1/\varepsilon_0 \mu_0)$ è il quadrato della velocità della luce nel vuoto. Così pure prendendo la divergenza di ambo i membri della (1.11) e tenendo conto delle $(1.2)_2$ e $(1.3)_2$ si ha

$$-\Delta_2 V - \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\mathbf{P},$$

che si può scrivere

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta_2 V = -\varepsilon_0^{-1}\operatorname{div}\mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right). \tag{1.13}$$

Ponendo con Lorentz

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{1.14}$$

le equazioni (1.12) e (1.13) diventano

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta_2 \mathbf{A} = \mu_0\left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{P}\wedge\boldsymbol{v})\right] = \mu_0 \mathbf{J}_p \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta_2 V = -\varepsilon_0^{-1}\operatorname{div}\mathbf{P} = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0}, \tag{1.16}$$

i cui primi membri sono formalmente analoghi. Si riconosce facilmente, prendendo la divergenza di ambo i membri della (1.15), che la (1.16) è conseguenza della (1.15) e della (1.14). Si conclude che le equazioni da considerare per il potenziale vettore **A** e per il potenziale scalare V sono la (1.15) e la (1.14).

Se ora supponiamo che il mezzo dielettrico sia soggetto a un campo magnetico applicato $\mathbf{B}_0$ constante e consideriamo i piccoli movimenti a partire da uno stato di equilibrio stabile, se indichiamo con $\boldsymbol{b}$ il campo magnetico indotto, ponendo cioè $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{b}$ e con $\boldsymbol{u}$ lo spostamento di un punto generico del mezzo, allora il campo elettrico **E** e la polarizzazione **P** risulteranno grandezze dello stesso ordine di $\boldsymbol{b}$ ed $\dot{\boldsymbol{u}}$ e trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a queste quantità e loro derivate, le equazioni (1.1), (1.2) e (1.9) diventano:

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 , \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0 , \tag{1.17}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{b}}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \boldsymbol{p}) = 0 , \qquad \operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \boldsymbol{p}) = 0 , \tag{1.18}$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_0 = \chi^{-1} \boldsymbol{p} + \eta^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} , \tag{1.19}$$

dove si è ora indicato con $\boldsymbol{p}$ il vettore polarizzazione dielettrica. Ponendo

$$\boldsymbol{b} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \mathrm{V} , \tag{1.20}$$

il potenziale vettore $\mathbf{A}$ e il potenziale scalare V soddisfano ancora alle equazioni (1.15) e (1.14).

2. Equazioni del moto

Per ricavare ora le equazioni dei piccoli movimenti di un mezzo dielettrico polarizzato, perfettamente elastico, utilizzeremo il principio variazionale di Hamilton espresso dalla relazione

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta \mathcal{L}_e + \delta \mathcal{L}_i + \delta \mathcal{L}_p + \delta \mathrm{T}\} \, \mathrm{d}t = 0 , \tag{2.1}$$

dove, per una variazione virtuale arbitraria $\delta \boldsymbol{u}$ dello spostamento $\boldsymbol{u}$, assoggettato alla sola condizione di annullarsi negli istanti estremi t_0 , t_1 dell'intervallo di tempo arbitrario (t_0 , t_1), si è indicato con $\delta \mathcal{L}_e$ il lavoro delle forze esterne, di massa e superficiali, con $\delta \mathcal{L}_i$ il lavoro delle forze interne, con $\delta \mathcal{L}_p$ il lavoro delle forze di polarizzazione e con $\delta \mathrm{T}$ la variazione dell'energia cinetica T.

Le forze di massa $\mathbf{F}$, riferite all'unità di volume, sono quelle che provengono dall'azione elettrostatica $\rho_p \mathbf{E}$ e dall'azione lorentziana $\mathbf{J}_p \wedge \mathbf{B}$, cioè per la (1.7) e la (1.5):

$$\mathbf{F} = -\operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{v}) \right] \wedge \mathbf{B} ,$$

che nell'approssimazione di primo ordine si riduce alla

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_0 . \tag{2.2}$$

Indicando con $\boldsymbol{f}$ le forze, riferite all'unità di area, che agiscono sulla superficie σ che limita il volume S occupato dal mezzo elastico, il lavoro $\delta \mathcal{L}_e$

delle forze esterne è dato da

$$(2.3) \qquad \delta\mathscr{L}_e = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_0 \times \delta\boldsymbol{u} \, dS + \int_\sigma \boldsymbol{f} \times \delta\boldsymbol{u} \, d\sigma .$$

Il lavoro delle forze elastiche interne risulta

$$(2.4) \qquad \delta\mathscr{L}_i = \int_S \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \times \delta \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\varphi}_2 \times \delta \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} + \boldsymbol{\varphi}_3 \times \delta \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3} \right) dS =$$

$$= \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\boldsymbol{\varphi}_1 \times \delta\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\boldsymbol{\varphi}_2 \times \delta\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\boldsymbol{\varphi}_3 \times \delta\boldsymbol{u}) \right\} dS -$$

$$- \int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial x_3} \right) \times \delta\boldsymbol{u} \, dS ,$$

dove con riferimento a una terna di assi cartesiani ortogonali x_1, x_2, x_3 si sono indicati con $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3$ i vettori che rappresentano gli sforzi elastici che si esercitano sui tre elementi superficiali, relativi ad un punto del mezzo, perpendicolari rispettivamente agli assi x_1, x_2, x_3. Se $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ sono i versori di questi assi, introducendo l'*omografia* o il *tensore* Φ *degli sforzi*, si può scrivere

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \Phi \mathbf{I}_i \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro della (2.4), indicando con $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie σ, diretta verso l'interno del volume S e introducendo il gradiente dell'omografia Φ, definito dalla

$$(2.5) \qquad \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial x_3} ,$$

la (2.4) diventa

$$(2.6) \qquad \delta\mathscr{L}_i = - \int_\sigma \Phi \boldsymbol{n} \times \delta\boldsymbol{u} \, d\sigma - \int_S \operatorname{grad} \Phi \times \delta\boldsymbol{u} \, dS .$$

Per calcolare ora il lavoro $\delta\mathscr{L}_p$ degli sforzi Π_i $(i = 1, 2, 3)$ di polarizzazione, ammetteremo che essi siano lineari nelle componenti p_i della polarizzazione, con coefficienti costanti dipendenti dalla struttura del mezzo. Porremo perciò

$$(2.7) \qquad \Pi_i = \sum_1^3{}_j \, p_j \, \sigma_i^j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con σ_i^j vettori costanti di componenti σ_{ik}^j e quindi

$$\Pi_{ik} = \sum_1^3{}_j \, p_j \, \sigma_{ik}^j , \qquad (k = 1, 2, 3) .$$

Analogamente alla (2.6) avremo allora

$$\delta \mathscr{L}_p = -\int_\sigma (\alpha_1 \boldsymbol{\Pi}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\Pi}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{\Pi}_3) \times \delta \boldsymbol{u} \, d\sigma - \tag{2.8}$$

$$-\int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_3}{\partial x_3} \right) \times \delta \boldsymbol{u} \, dS ,$$

dove α_1, α_2, α_3 sono i coseni direttori della normale interna alla superficie σ.

Infine la variazione dell'energia cinetica T, in tutto l'intervallo di tempo (t_0, t_1), risulta [3]

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \times \delta \boldsymbol{u} \, dS , \tag{2.9}$$

dove ρ è la densità del mezzo.

Sostituendo le (2.3), (2.6), (2.8) e (2.9) nella (2.1), per l'arbitrarietà della variazione $\delta \boldsymbol{u}$ dello spostamento $\boldsymbol{u}$ e l'arbitrarietà dell'intervallo di tempo (t_0, t_1), tanto negli integrali di volume, come in quelli di superficie, si deducono le equazioni

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} + \sum_1^3{}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{\Pi}_i) - \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_0 = 0 \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_1^3{}_i \alpha_i (\boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{\Pi}_i) , \tag{2.11}$$

la prima delle quali deve essere verificata in ogni punto interno al mezzo elastico e la seconda in ogni punto della superficie che lo limita.

Le equazioni indefinite che reggono il fenomeno della polarizzazione elettromagnetica e i piccoli movimenti del mezzo elastico considerato sono dunque le $(1.17)_1$, $(1.18)_1$, (1.19) e (2.10), che in totale dànno luogo a 12 equazioni scalari, in cui sono incognite le 12 componenti b_i, E_i, p_i, u_i del campo magnetico indotto $\boldsymbol{b}$, del campo elettrico $\mathbf{E}$, della polarizzazione $\boldsymbol{p}$ e dello spostamento $\boldsymbol{u}$.

Osserviamo che l'omografia o il tensore Φ degli sforzi elastici è ordinariamente un tensore simmetrico ($\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$). Nel nostro caso, per porci da un punto di vista più generale, poiché il campo magnetico può determinare una dissimetria di detti sforzi, supporremo che questi sforzi siano asimmetrici [4]. Le stesse ipotesi faremo per gli sforzi di polarizzazione Π_{ik}.

(3) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Istituzioni di Fisica Matematica*, Parte III, Cap. III, § 8, Zanichelli, Bologna, 1962.

(4) Cfr. C. SOMIGLIANA, *Sopra una estensione della teoria della elasticità*, « Rend. Acc. Lincei », *19* (1910) e C. AGOSTINELLI, *Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico omogeneo isotropo elettricamente conduttore in moto vibratorio sotto l'azione di un campo magnetico*, Note I e II, « Rend. Acc. Lincei », *43* (1967) e *44* (1968).

3. ESISTENZA DEL POTENZIALE DEGLI SFORZI

Nel caso in cui il movimento del mezzo elastico considerato avviene senza variazione di quantità di calore, si può dimostrare facilmente, in base al secondo principio della termodinamica, che esiste, come nel caso classico, il potenziale degli sforzi elastici e di polarizzazione.

Avendo supposto che detti sforzi siano asimmetrici, essi dipenderanno linearmente, oltre che dalle componenti della deformazione pura

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , \quad u_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad , \quad u_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, , \\ &u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad , \quad u_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad , \quad u_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \, , \\ &\qquad\qquad (u_{ij} = u_{ji}) \, , \end{aligned}$$

anche dalle tre componenti della rotazione $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$:

$$(3.2)\qquad \omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad , \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad , \quad \omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \, .$$

Il potenziale degli sforzi sarà allora composto di due parti. Una prima parte W_e, omogenea quadratica nelle componenti della deformazione e della rotazione, con coefficienti dipendenti dalle proprietà elastiche del mezzo, fornirà le componenti Φ_{ik} degli sforzi elastici. Una seconda parte W_p sarà invece bilineare nelle componenti della deformazione e rotazione e nelle componenti della polarizzazione con coefficienti dipendenti dalle proprietà piezoelettriche del mezzo coibente. Posto allora $\Psi_{ik} = \Phi_{ik} + \Pi_{ik}$ e indicando con $W = W_e + W_p$ il potenziale totale si avrà

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial u_{11}} = \Psi_{11} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial u_{22}} = \Psi_{22} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial u_{33}} = \Psi_{33} \, , \\ &\frac{\partial W}{\partial u_{12}} = \frac{1}{2}(\Psi_{12} + \Psi_{21}) \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial u_{23}} = \frac{1}{2}(\Psi_{23} + \Psi_{32}) \, , \\ &\frac{\partial W}{\partial u_{31}} = \frac{1}{2}(\Psi_{31} + \Psi_{13}) \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2}(\Psi_{23} - \Psi_{32}) \, , \\ &\frac{\partial W}{\partial \omega_2} = \frac{1}{2}(\Psi_{31} - \Psi_{13}) \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_3} = \frac{1}{2}(\Psi_{12} - \Psi_{21}) \end{aligned}$$

e reciprocamente

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &\Psi_{12} = \frac{\partial W}{\partial u_{12}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_3} \quad , \quad \Psi_{23} = \frac{\partial W}{\partial u_{23}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_1} \, , \\ &\Psi_{31} = \frac{\partial W}{\partial u_{31}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_2} \quad , \quad \Psi_{21} = \frac{\partial W}{\partial u_{12}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_3} \, , \\ &\Psi_{32} = \frac{\partial W}{\partial u_{23}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_1} \quad , \quad \Psi_{13} = \frac{\partial W}{\partial u_{31}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_2} \, . \end{aligned}$$

In una successiva Nota sarà determinata l'espressione del potenziale W per diverse strutture di mezzi cristallini. Qui vogliamo ancora osservare che l'ipotesi della asimmetria degli sforzi equivale ad ammettere che il tensore $\Psi = \Phi + \Pi$, risultante degli sforzi, sia composto di una parte simmetrica uguale a $\frac{1}{2}(\Psi + \Psi^*)$ e di una parte emisimmetrica uguale a $\frac{1}{2}(\Psi - \Psi^*)$, essendo Ψ^* la *coniugata* o *trasposta* dell'omografia Ψ.

Per effetto di questa dissimetria ne nasce su ogni elemento di volume del mezzo una coppia di reazione [5] il cui momento **M** è tale che $\mathbf{M}\wedge = \Psi - \Psi^*$ e quindi ha componenti

$$M_1 = \Psi_{23} - \Psi_{32} \quad , \quad M_2 = \Psi_{31} - \Psi_{13} \quad , \quad M_3 = \Psi_{12} - \Psi_{21} \tag{3.5}$$

riferite all'unità di volume.

(5) Cfr. C. AGOSTINELLI, *loc. cit.* in (4).