
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

RENZO MAZZOCCO

**Ancora sull'anello caratteristico di estensioni di
algebre di Lie**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 63 (1977), n.5, p. 372–374.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_5_372_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Ancora sull'anello caratteristico di estensioni di algebre di Lie.* Nota di RENZO MAZZOCCO (*), presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — In this Note the Author continues the investigations of [2] on the construction of "constant invariant" forms (and hence of characteristic classes) for any Lie algebra extension, satisfying suitable conditions.

1. Sia $\mathcal{E}: \mathfrak{o} \rightarrow H \xrightarrow{\iota} P \rightarrow T \rightarrow \mathfrak{o}$, un'estensione di R -algebre di Lie, R anello commutativo con unità, soddisfacente alle condizioni del n. 2.1 di [2]. Ricordato, in particolare, che il nucleo H di una $\mathcal{E}$ siffatta ha una struttura di algebra associativa su una R -algebra commutativa F con unità, supponiamo inoltre che

(1) H , come algebra associativa su F , sia dotata di unità u ,

donde, tenuta presente la (2.1.2.) di [2], si trae,

$$\forall p \in P, [p, u] = [p, u \times u] = [p, u] \times u + u \times [p, u] = 2[p, u]$$

implicante

$$(2) \quad [p, u] = \mathfrak{o}, \quad \forall p \in P.$$

Ciò premesso, sia $\varphi_n: H^n \rightarrow F, n > 1$, una forma «invariante costante» di grado n di $\mathcal{E}$ (nel senso di [3], § 4); cioè φ_n sia una forma (F, n) -lineare su H tale che, $\forall p \in P$ e $\forall (h_1, \dots, h_n) \in H^n$, risulti

$$(3) \quad \pi(p) \varphi_n(h_1, \dots, h_n) = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_n).$$

Stabiliamo il seguente

TEOREMA. La funzione $\varphi_m: H^m \rightarrow F, 1 \leq m \leq n-1$; definita ponendo, $\forall (h_1, \dots, h_m) \in H^m$,

$$(4) \quad \varphi_m(h_1, \dots, h_m) = \varphi_n(h_1, \dots, h_m, u, \dots, u),$$

è una forma «invariante costante» di grado m di $\mathcal{E}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R. e dedicato alla memoria di mio padre Francesco Mazzocco recentemente scomparso.

(**) Nella seduta del 18 novembre 1977.

Dimostrazione. Dalla definizione (4) e dalla (F, n) -linearità di φ_n si trae immediatamente che la φ_m è una forma (F, m) -lineare. Per provare l'asserto resta allora da dimostrare soltanto che è soddisfatta la seguente condizione

$$(5) \quad \pi(p) \varphi_m(h_1, \dots, h_m) = \sum_1^m \varphi_m(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_m), \forall p \in P$$

$$\text{e } \forall (h_1, \dots, h_m) \in H^m.$$

Dalla (3), posto in essa $h_{m+1} = h_{m+2} = \dots = h_n = u$, si ha,

$$\forall (h_1, \dots, h_m) \in H^m, \pi(p) \varphi_m(h_1, \dots, h_m, u, \dots, u) = \sum_1^m \varphi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_m, u, \dots, u) + \sum_{m+1}^n \varphi_n(h_1, \dots, h_m, u, \dots, [p, u], \dots, u);$$

ma, per la (2), e per la (F, n) -linearità di φ_n , la seconda somma è nulla onde risulta

$$\pi(p) \varphi_n(h_1, \dots, h_m, u, \dots, u) = \sum_1^m \varphi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_m, u, \dots, u)$$

ed essendo, per la (4),

$$\varphi_n(h_1, \dots, h_m, u, \dots, u) = \varphi_m(h_1, \dots, h_m)$$

nonchè

$$\varphi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_m, u, \dots, u) = \varphi_m(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_m)$$

si ha in definitiva che la φ_m soddisfa la (5).

2. Sia ora $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E): \mathfrak{o} \rightarrow C^\infty(M, \text{Hom}(E, E)) \rightarrow P \rightarrow C^\infty(M, T(M)) \rightarrow \mathfrak{o}$, $R = \mathbf{R}$, $F = C^\infty(M, \mathbf{R})$ un'estensione di algebre di Lie associata ad un fibrato vettoriale reale E su una varietà differenziabile connessa M (ved. [2], n. 3.1 oppure [3], n. 6.1) e si osservi che ad $\mathcal{E}(E)$ è applicabile il teorema precedente. Infatti $\mathcal{E}(E)$ soddisfa alle condizioni del n. 2.1 di [2] e la sezione I costituita dagli endomorfismi identità è un elemento unità nella struttura di F -algebra associativa di $H = C^\infty(M, \text{Hom}(E, E))$.

Si consideri inoltre la forma (F, m) -lineare $G_m: H^m \rightarrow F$, $1 \leq m \leq n$, ottenuta polarizzando il polinomio $g_m(X)$, omogeneo di grado m negli elementi x_{ij} della matrice quadrata X d'ordine n , definito da $\det(\lambda \Delta - X) = \lambda^n + \sum_1^n (-1)^{n-m} g_m(X) \lambda^{n-m}$; è noto che ogni G_m è una forma invariante nel senso di S. S. Chern e A. Weil e quindi, per la Proposizione 15 di [3], è una forma « invariante costante » di $\mathcal{E}(E)$.

Ebbene, un calcolo elementare (se pur non breve) mostra, che, per ogni m -pla $X_1, \dots, X_m$ di matrici quadrate d'ordine n , risulta

$$(6) \quad G_m(X_1, \dots, X_m, \Delta, \dots, \Delta) = \frac{m!(n-m)!}{n!} G_m(X_1, \dots, X_m)$$

e quindi per ogni $(h_1, \dots, h_m) \in H^m$ si ottiene:

$$(7) \quad G_n(h_1, \dots, h_m, I, \dots, I) = \frac{m!(n-m)!}{n!} G_m(h_1, \dots, h_m).$$

Assumendo nella (4) $\varphi_n = G_n$ ed $u = I$ si ha poi, osservato che allora è $\varphi_m(h_1, \dots, h_m) = G_n(h_1, \dots, h_m, I, \dots, I)$,

$$(8) \quad \varphi_m(h_1, \dots, h_m) = \frac{m!(n-m)!}{n!} G_m(h_1, \dots, h_m).$$

In conclusione: le forme « invarianti costanti » φ_m di $\mathcal{E}(E)$ costruite con il teorema precedente, quando si assume in esso come φ_n la forma « invariante costante » G_n ottenuta polarizzando $g_n(X) = \det(X)$, coincidono, a meno di fattori moltiplicativi costanti, con le forme « invarianti costanti » G_m ottenute polarizzando i coefficienti $g_m(X)$ dell'equazione caratteristica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU (1969) - *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience Publishers.
- [2] R. MAZZOCCO (1976) - *Sull'anello caratteristico di estensioni di algebre di Lie*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 60, 240-244.
- [3] N. TELEMANN (1972) - *A characteristic ring of a Lie algebra extension*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 52, 498-506 e 708-711.