Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Daniela Giachetti, Elvira Mascolo

## Problemi quasi ellittici in spazi di Sobolev con peso

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **63** (1977), n.5, p. 360–367.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_5_360_0>

**Equazioni a derivate parziali.** — *Problemi quasi ellittici in spazi di Sobolev con peso.* Nota di DANIELA GIACHETTI e ELVIRA MASCOLO (*), presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — Boundary value problems for linear quasi-elliptic A + $\sigma$-type operators with variable coefficients are studied in the unbounded region of $\mathbf{R}^n$, definited by $x_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$; $\sigma$ means a perturbation whose behaviour is assigned at infinity and in the angular points of the domain. It is proved that the operator related to the problem has closed range and finite dimensional null space. The study is developed within a new class of dissimetric Sobolev weighted spaces.

1. Sia $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, con $n \geq 2$ e, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\Omega_i = \mathbf{R}_+$. Nel seguito porremo, per $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathrm{R}_+$, $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$
\begin{aligned}
{}^i x &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n), \\
({}^i x, y) &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n), \\
{}^i\Omega &= \{x \in \overline{\Omega} : x_i = 0, \quad x_j > 0 \quad j \neq i\},
\end{aligned}
$$

e inoltre

$$
\mathrm{S} = \partial\Omega - \bigcup_{i=1}^{n} {}^i\Omega .
$$

Assegnata una $n$-pla di numeri interi positivi $(m_1, \cdots, m_n)$, poniamo:

$$
m = \max_i m_i \quad , \quad q_i = \frac{m}{m_i}, \qquad q = (q_1, \cdots q_n).
$$

Sia $\rho$ una funzione continua in $\overline{\Omega}$, positiva in $\overline{\Omega} - \mathrm{S}$, nulla su S e tale che:

1.1. Esiste $\gamma$ costante positiva per cui:

$$
\gamma^{-1} \rho(x_0) \leq \rho(x) \leq \gamma\rho(x_0), \qquad \forall x_0 \in \overline{\Omega} - \mathrm{S}, \qquad \forall x \in \mathrm{I}(x_0),
$$

dove, posto per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$
\mathrm{I}_i(x_0) = \{y \in \mathbf{R}_+ : | y - x_{0i} | < \rho(x_0)^{q_i}\},
$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienze dell'Informazione dell'Università di Salerno, nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni del C.N.R.
(**) Nella seduta del 18 novembre 1977.

definiamo

$$\mathrm{I}(x_0) = \mathrm{I}_1(x_0) \times \cdots \times \mathrm{I}_n(x_0) \text{ (1)-(2)}.$$

Introduciamo ora una classe di distribuzioni su $\Omega$. Fissato $\gamma_0 \geq \gamma$, $\lambda \in ]0, 1[$, $s \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\mathrm{M}({}^i x) = \{(x_i, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ : \gamma_0^{-1} \rho({}^i x, y) \leq \rho(x) \leq \gamma_0 \rho({}^i x, y)\},$$

$$\mathrm{L}^\lambda_{s,i}(u) = \int_{{}^i\Omega} \mathrm{d}\, {}^i x \int_{\mathrm{M}({}^i x)} \rho_{(x)}^{2(s+\lambda q_i)} \frac{|u(x) - u({}^i x, y)|^2}{|x_i - y|^{1+2\lambda}} \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}y .$$

DEFINIZIONE 1.1. *Assegnati* $k \in \mathrm{N}_0$, $\lambda \in ]0, 1[$, $s \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, *indichiamo con* $\mathrm{W}^k_{s,i}(\Omega)$ *lo spazio delle distribuzioni* $u$ *su* $\Omega$ *tali che*:

$$\partial^t_{x_i} u \in \mathrm{L}^2_{s+tq_i}(\Omega) \qquad t = 0, \cdots, k,$$

*munito della norma*

$$\| u \|_{\mathrm{W}^k_{s,i}(\Omega)} = \left( \sum_{t=0}^{k} \| \partial^t_{x_i} u \|^2_{\mathrm{L}^2_{s+tq_i}(\Omega)} \right)^{1/2},$$

*e con* $\mathrm{W}^{k+\lambda}_{s,i}(\Omega)$ *lo spazio delle* $u \in \mathrm{W}^k_{s,i}(\Omega)$ *per cui*

$$\mathrm{L}^\lambda_{s+kq_i,i}(\partial^k_{x_i} u) < +\infty,$$

*munito della norma*

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{k+\lambda}_{s,i}(\Omega)} = (\| u \|^2_{\mathrm{W}^k_{s,i}(\Omega)} + \mathrm{L}^\lambda_{s+kq_i,i}(\partial^k_{x_i} u))^{1/2}.$$

DEFINIZIONE 1.2. *Per ogni* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, *indichiamo con* $\mathrm{W}^r_s(\Omega)$ *lo spazio* $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{W}^{r/q_i}_{s,i}(\Omega)$, *munito della norma*:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^r_s(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^{n} \| u \|^2_{\mathrm{W}^{r/q_i}_{s,i}(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Notiamo che, nelle ipotesi poste, la norma è indipendente dalla scelta di $\gamma_0 \geq \gamma$. Una opportuna caratterizzazione di questa norma in funzione di

(1) Posto $\mathrm{d}(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{S})$, si prova facilmente che le funzioni:

$$\rho(x) = \frac{\mathrm{d}(x)}{k + \mathrm{d}(x)} \qquad \rho(x) = \frac{\mathrm{d}(x)}{k(1 + \mathrm{d}(x)^2)},$$

con $k$ assegnato numero reale $\geq 2\sqrt{n}$, soddisfano le condizioni richieste.

(2) Notiamo che nelle ipotesi poste,

$$\overline{\mathrm{I}(x_0)} \cap \mathrm{S} = \Phi \qquad \forall x_0 \in \overline{\Omega} - \mathrm{S}.$$

quella negli spazi $W^r(\Omega)$ (cfr. [6]) consente di stabilire teoremi di densità e di tracce. Accenniamo brevemente ad essa.

Assegnati $x_0 \in \overline{\Omega} - S$, $u : \overline{\Omega} - S \to \mathbf{C}$, $A \subset \Omega$ poniamo:

$$\Phi_{x_0} : x \in \overline{\Omega} - S \to \xi = \left(\frac{x_1 - x_{01}}{\rho(x_0)^{q_1}} + x_{01}, \cdots, \frac{x_n - x_{0n}}{\rho(x_0)^{q_n}} + x_{0n}\right),$$

$$u^*_{x_0} = u \circ \Phi^{-1}_{x_0} \quad , \quad A^*_{x_0} = \Phi_{x_0}(A) ;$$

l'indice $x_0$ sarà omesso quando non vi sia possibilità di equivoci. Si ha la seguente relazione:

$$\| u \|_{W^r_s(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho(x_0)^{2s} \| u \|^2_{W^r(I^*(x_0))} \, dx_0 \ ^{(3)} .$$

Sia ora $\delta$ una funzione continua e positiva in $\overline{\Omega} - S$ che verifichi la condizione:

1.2. Esistono due costanti positive $c_1, c_2$, tali che:

$$c_1 \delta(x_0) \leq \delta(x) \leq c_2 \delta(x_0) \qquad \forall x \in \overline{I(x_0)} \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega} - S \ ^{(4)} .$$

Denotato con $L^2_s(\Omega, \delta)$ per $s \in \mathbf{R}$, lo spazio delle $u$ tali che $\rho^s \delta u \in L^2(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{L^2_s(\Omega,\delta)} = \| \rho^s \delta u \|_{L^2(\Omega)} ,$$

diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.3. *Per ogni* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $s \in \mathbf{R}$, *indichiamo con* $W^r_s(\Omega, \delta)$ *lo spazio delle distribuzioni* $u \in W^r_s(\Omega) \cap L^2_{s+r}(\Omega, \delta^r)$, *munito della norma*:

$$\| u \|_{W^r_s(\Omega,\delta)} = (\| u \|^2_{W^r_s(\Omega)} + \| u \|^2_{L^2_{s+r}(\Omega,\delta^r)})^{1/2} .$$

(3) Se H è un arbitrario insieme, $h_1, h_2$ sono due applicazioni di H in $\mathbf{R}_+$, porremo

$$h_1(t) \sim h_2(t)$$

se esistono due costanti positive tali che

$$c_1 h_1(t) \leq h_2(t) \leq c_2 h_1(t) \qquad \forall t \in H .$$

(4) La funzione:

$$\delta(x) = \frac{a}{d(x)^t} + b \, | x |^\vartheta \qquad a, b \in \mathbf{R}_+, \ t \geq 1, \vartheta \geq 0$$

soddisfa la condizione 1.2. rispetto alla funzione peso

$$\rho(x) = \frac{d(x)}{k + d(x)} \qquad k \geq 2\sqrt{n} .$$

Caratterizzata opportunamente la norma in $W_s^r(\Omega\,;\,\delta)$ (cfr. [1], [5]), vengono stabiliti risultati di densità, immersione e tracce.

Nell'ulteriore ipotesi che $\delta$ abbia un particolare comportamento all'infinito e nei punti di S, otteniamo il seguente risultato di compattezza (cfr. [2]):

TEOREMA 1.1. *Sia* $r \in \mathbf{R}_+$ *e inoltre*:

$$\lim_{x \to z} \rho(x)\,\delta(x) = \lim_{|x| \to \infty} \rho(x)\,\delta(x) = +\infty \qquad \forall z \in S\,;$$

*allora l'immersione*

$$W_s^r(\Omega\,,\,\delta) \hookrightarrow L_s^2(\Omega)\,,$$

*è compatta.*

2. Nella seconda parte del lavoro, stabiliamo preliminarmente una limitazione a priori per problemi quasi ellittici con parametro. Posto, per ogni $h \in \mathbf{R}_+$:

$$Q_h = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < h\,,\ i = 1\,,\cdots,\,n\}\,,$$

$$\Gamma_h = \{x \in Q_h : x_n \geq 0\} \quad , \quad \Gamma'_h = \{x \in Q_h : x_n = 0\}\,,$$

indichiamo con $\Sigma_h$ l'uno o l'altro dei due insiemi $Q_h$ e $\Gamma_h$ e con $Q$, $\Gamma$, $\Gamma'$, $\Sigma$ rispettivamente $Q_1$, $\Gamma_1$, $\Gamma'_1$ e $\Sigma_1$.

Assegniamo in $\overline{\Sigma}$ l'operatore con parametro (cfr. [1]):

$$A(x) = A(x\,,\,D\,,\,\theta) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle+\gamma\leq m} a_{\alpha\gamma}(x)\,\theta^\gamma D^\alpha \qquad \theta \in \overline{\mathbf{R}}_+\,.$$

e supponiamo:

H$_1$) Per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\theta \in \overline{\mathbf{R}}_+$ tali che $\theta + |\xi| > 0$, per ogni $x \in \overline{\Sigma}$,

$$A_0(x\,,\,\xi\,,\,\theta) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle+\gamma=m} a_{\alpha\gamma}(x)\,\theta^\gamma \xi^\alpha \neq 0\,.$$

Di conseguenza, essendo $n \geq 2$ (cfr. Prop. 2.2. di [1]) $A(x)$ è propriamente quasi ellittico di tipo $\nu$ su $\Gamma'$, cioè per ogni $x = ({}^n x\,,\,0)$, per ogni $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\theta \in \overline{\mathbf{R}}_+$ con $|\eta| + \theta > 0$, posto $\alpha' = (\alpha_1\,,\cdots,\,\alpha_{n-1})$, l'equazione nella variabile complessa $z$:

$$A_0(x\,,\,\eta\,,\,z\,,\,\theta) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle+\gamma=m} a_{\alpha\gamma}(x)\,\theta^\gamma \eta^{\alpha'} z^{\alpha_n} = 0$$

ammette esattamente $\nu$ radici con parte immaginaria positiva: $z_1^+(x\,,\eta\,,\theta),\cdots$ $\cdots,\,z_\nu^+(x\,,\,\eta\,,\,\theta)$.

Assegniamo su $\overline{\Gamma}'$ un sistema di $\nu$ operatori differenziali lineari *di frontiera* della forma:

$$B_j({}^n x) = B_j({}^n x\,,\,D\,,\,\theta) = \sum_{\langle\mu,q\rangle+\gamma\leq p_j} b_{j\mu\gamma}({}^n x)\,\theta^\gamma D^\mu \qquad 1 \leq j \leq \nu\,,$$

e supponiamo:

$H_2$) Se $\Sigma = \Gamma$, $\{B_j({}^n x)\}_{1 \le j \le \nu}$ verificano la condizione complementare rispetto ad $A(x)$ su $\Gamma'$.

Con $l$ e $l_0$ denoteremo due numeri reali tali che:

$$l \geq l_0 \geq m \quad ; \quad l_0 > q_n/2 + \max_j p_j .$$

Sui coefficienti degli operatori faremo le seguenti ipotesi:

$H_3$) Per $\langle \alpha , q \rangle + \gamma = m$, $a_{\alpha\gamma} \in C^0(\overline{\Sigma})$; per $\langle \alpha , q \rangle + \gamma \leq m$, $a_{\alpha\gamma}$ appartengono allo spazio di moltiplicatori per $W^{l-m}(\Sigma)$, $A^{l-m}(\Sigma)$. (Cfr. [6]).

$H_4$) Risulta $p_j \leq m - q_n$; per $\langle \mu , q \rangle + \gamma = p_j$, $b_{j\mu\gamma} \in C^0(\overline{\Gamma'})$; per $\langle \mu , q \rangle + \gamma \leq p_j$, $b_{j\mu\gamma}$ appartengono allo spazio di moltiplicatori per $W^{l-p_j-q_n/2}(\Gamma')$, $A^{l-p_j-q_n/2}(\Gamma')$.

TEOREMA 2.1. *Siano verificate le ipotesi* $H_1$)–$H_4$). *Fissato* $h \in ]0, 1]$ $\theta_0 \in \mathbf{R}_+$, *per ogni* $u \in W^l(\Sigma)$ *e* $\theta > \theta_0$, *sussiste la limitazione* (5):

$$|||u|||_{l,\Sigma_h} \leq c \{ |||A(x)\,u|||_{l-m,\Sigma} + \\ + \sum_{j=1}^{n} |||B_j^{(i)}({}^n x)\,u|||_{l-p_j-q_n/2,\Gamma'} + \|u\|_{0,\Sigma} \}$$

*dove* $c$ *è una costante indipendente da* $u$ *e da* $\theta$; *gli operatori di frontiera non figurano se* $\Sigma_h = Q_h$.

La tecnica usata è quella di considerare un opportuno ricoprimento finito di $\overline{\Sigma}_{h''}$ con $h < h'' < 1$ e una partizione dell'unità ad esso relativa e di applicare maggiorazioni note per operatori a coefficienti costanti e per funzioni a supporto contenuto negli elementi del ricoprimento. Un noto lemma di crescenza di C. Miranda consente di pervenire alla tesi.

Studiamo quindi il problema:

$$\begin{aligned} & u \in W_s^m(\Omega , \sigma^{1/m}) , \\ & (A + \sigma)\,u = f \qquad \text{su} \quad \Omega , \\ & B_j^{(i)}\,u = g_j^{(i)} \qquad \text{su} \quad {}^i\Omega \quad 1 \leq j \leq \nu_i , \quad 1 \leq i \leq n , \end{aligned}$$

dove A e $B_j^{(i)}$ sono operatori differenziali lineari definiti rispettivamente su $\overline{\Omega}$ e ${}^i\Omega$ e della forma:

$$A = A(x , D) = \sum_{\langle \alpha , q \rangle \leq m} a_\alpha(x)\,D^\alpha ,$$

$$B_j^{(i)} = B_j^{(i)}({}^i x , D) = \sum_{\langle \mu , q \rangle \leq p_{i_j}} b_{j\mu}^{(i)}({}^i x)\,D^\mu \qquad 1 \leq j \leq \nu_i , \quad 1 \leq i \leq n ;$$

(5) Con $|||\cdot|||_{r,G,\vartheta}$ denotiamo la norma in $W^r(G , \vartheta)$, (cfr. [1]) sottintendo l'indice $\vartheta$ nei casi in cui non vi sia possibilità di equivoci.

$\sigma$ è una perturbazione positiva e continua in $\overline{\Omega} - S$, soddisfacente la condizione 1.2. e le condizioni

K$_1$)
$$\inf_{\Omega} \sigma(x)^{1/m} \rho(x) \geq c > 0 ,$$

K$_2$)
$$\lim_{\delta \to 0} \sup \frac{|\sigma(x') - \sigma(x'')|}{\sigma(x_0)} = 0 ,$$

dove il sup è esteso agli $x', x'' \in I(x_0)$ tali che, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$ $|x_i' - x_i''| < \rho(x_0)^{q_i} \delta$, e a $x_0 \in \Omega$.

Gli operatori A e $B_j^{(i)}$ verificano le seguenti ipotesi:

K$_3$) Per $\langle \alpha, q \rangle \leq m$ $\quad a_\alpha(x) \in L^\infty_{m - \langle \alpha, q \rangle}(\Omega)$

K$_4$) Esiste $\alpha_0 \in \mathbf{R}_+$ tale che per ogni $(\xi, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}}_+$, con $|\xi| + t > 0$, e per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$\alpha_0 \left( \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{m_i} + t^m \right) \leq \left| \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha + t^m \right| .$$

Di conseguenza, essendo $n \geq 2$, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$, l'operatore $A + t^m$ è propriamente quasi-ellittico di tipo $\nu_i$ su ${}^i\Omega$.

K$_5$) Per $\langle \mu, q \rangle \leq p_{ij}$, $\quad 1 \leq j \leq \nu_i$, $\quad$ e $\quad i, k \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq k$, posto

$$(m - p_{ij} - q_i/2)\, q_k^{-1} = h + \lambda \quad \text{con} \quad h \in N_0 \quad \text{e} \quad \lambda \in [0, 1[ ,$$

si ha:

$$\partial^t_{x_i} b^{(i)}_{j\mu} \in L^\infty_{p_{ij} + t q_k - \langle \mu, q \rangle}({}^i\Omega) , \qquad \text{per} \quad t \leq h ,$$

$$\sup_{{}^i x_0 \in {}^i\Omega} \rho({}^i x_0)^{2(m - \langle \mu, q \rangle - q_i/2)} \sup_{{}^i y \in I({}^i x_0)} \int_{I_k({}^i x_0)} \frac{|\partial^h_{x_k} b^{(i)}_{j\mu}({}^i y) - \partial^h_{x_k} b^{(i)}_{j\mu}({}^i x)|^2}{|{}^i x_k - {}^i y_k|^{1+2\lambda}} \, d\, {}^i x_k < +\infty$$

K$_6$) Per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$ gli operatori $B_1^{(i)}, \cdots, B_{\nu_i}^{(i)}$ soddisfano la condizione complementare rispetto a $A + t^m$ su ${}^i\Omega$.

K$_7$) Posto:

$$w_\delta = (\sup \Sigma\, |a_\alpha(x') - a_\alpha(x'')|) + (\sup \Sigma\, |b^{(i)}_{j\mu}({}^i x) - b^{(i)}_{j\mu}({}^i y)|) ,$$

dove, nel primo termine, la sommatoria è estesa agli $\alpha$ tali che $\langle \alpha, q \rangle = m$ e il sup agli $x', x'' \in I(x_0)$ con $|x_i' - x_i''| < \delta \rho^{q_i}(x_0)$ per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$ e nel secondo termine la sommatoria è estesa ai $\mu$ per cui $\langle \mu, q \rangle = p_{ij}$, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, \nu_i\}$ e il sup agli ${}^i x, {}^i y \in I({}^i x_0)$ con $|{}^i x_k - {}^i y_k| \leq \delta \rho({}^i x_0)^{q_k}$, $k \in \{1, \cdots, n\}$ e $k \neq i$ e a ${}^i x_0 \in {}^i\Omega$, risulta:

$$\lim_{\delta \to 0} w_\delta = 0 .$$

TEOREMA 2.2. *Siano verificate le ipotesi* $K_1$)–$K_3$) *e* $K_5$). *L'operatore*

$$\mathcal{U} : u \to ((A+\sigma)\, u\,, \{B_j^{(i)}\, u\}_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le \nu_i}})\,,$$

*è lineare e continuo da*

$$W_s^m(\Omega\,,\sigma^{1/m}) \quad a \quad L^2_{s+m}(\Omega)\times\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\nu_i} W^{m-p_{ij}-q_i/2}_{s+p_{ij}+q_i/2}({}^i\Omega\,,\sigma_i^{1/m})\,,$$

*ove* $\sigma_i$ *indica la restrizione di* $\sigma$ *a* ${}^i\Omega$.

TEOREMA 2.3. *Siano verificate le ipotesi* $K_1$)–$K_7$) *e sia* $s\in\mathbf{R}$. *Se*

$$u\in W^m_{\text{loc}}(\overline{\Omega}-S)\cap L^2_s(\Omega)\,,$$

$$(A+\sigma)\,u\in L^2_{s+m}(\Omega)\,,$$

$$B_j^{(i)}\,u\in W^{m-p_{ij}-q_i/2}_{s+p_{ij}+q_i/2}({}^i\Omega\,,\sigma_i^{1/m})\qquad 1\le j\le\nu_i\,,\quad 1\le i\le n\,.$$

*si ha* $u\in W_s^m(\Omega\,,\sigma^{1/m})$ *e vale la maggiorazione*:

$$\|u\|_{W_s^m(\Omega,\sigma^{1/m})}\le c\,\{\|(A+\sigma)\,u\|_{L^2_{s+m}(\Omega)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\nu_i}\|B_j^{(i)}\,u\|_{W^{m-p_{ij}-q_i/2}_{s+p_{ij}+q_i/2}({}^i\Omega\,,\sigma_i^{1/m})}+\|u\|_{L^2_s(\Omega)}\}\,,$$

*dove nella sommatoria al secondo membro compaiono le norme relative agli spazi di tracce e* $c$ *è una costante indipendente da* $u$.

Diamo un cenno della dimostrazione. Posto, per ogni $x_0\in\Omega$:

$$\tilde{A}(x_0\,,\xi\,,D)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\le m} a_\alpha^*(\xi)\,\rho(x_0)^{m-\langle\alpha,q\rangle}\,D_\xi^\alpha$$

$$\tilde{B}_j^{(i)}(x_0\,,{}^i\xi\,,D)=\sum_{\langle\mu,q\rangle\le p_{ij}} b_{j\mu}^{*(i)}({}^i\xi)\,\rho(x_0)^{p_{ij}-\langle\mu,q\rangle}\,D_\xi^\mu$$

consideriamo l'operatore $\tilde{A}+\sigma^*(\xi)\,\sigma(x_0)^{-1}\,\theta^m$ dove $\theta=\sigma^{1/m}(x_0)\,\rho(x_0)$ e, nel caso che esista $i\in\{1\,,\cdots,n\}$ tale che $I^*(x_0)\cap{}^i\Omega\neq\Phi$, gli operatori $\tilde{B}_j^{(i)}$ per $1\le j\le\nu_i$. Le ipotesi del Teorema 2.1 sono verificate in $I^*(x_0)$ per $l=m$; infatti, in virtù della nota (2), esiste al più $i\in\{1\,,\cdots,n\}$ per cui $I^*(x_0)\cap{}^i\Omega\neq\Phi$ e la validità delle $H_1$)–$H_4$) è assicurata dalle ipotesi $K_3$)–$K_6$). Osserviamo, inoltre, che la costante che interviene nella maggiorazione del Teorema 2.1 risulta indipendente da $x_0\in\Omega$, per le ipotesi $K_2$) e $K_7$). Moltiplichiamo allora, ambo i membri della maggiorazione ottenuta per $\rho(x_0)^{2s}$ e integriamo su $\Omega$; la caratterizzazione della norma e qualche ulteriore passaggio ci consentono di ottenere la tesi.

Dai teoremi precedenti e dal teorema di compattezza 1.1 abbiamo:

TEOREMA 2.4. *Per ogni* $z \in S$ *sia*:

$$\lim_{x \to z} \sigma(x)^{1/m} \rho(x) = \lim_{|x| \to \infty} \sigma(x)^{1/m} \rho(x) = +\infty$$

*e siano inoltre verificate le ipotesi* $K_2$)–$K_7$). *L'operatore* $\mathcal{U}$ *ha rango chiuso e nucleo di dimensione finita.*

## BIBLIOGRAFIA


[1] AGRANOVICH–VISHICH (1964) – *Elliptic problem with a parameter and parabolic problems of general type*, « Russiam Math. Surveys », *19*.

[2] BENCI–FORTUNATO (1976) – *Some compact embedding theorems for weighted Sobolev space* « Boll. UMI », *13*, 832–843.

[3] S. MATARASSO–M. TROISI – *Operatori differenziali ellittici in spazi di Sobolev con peso*. In corso di stampa su « Ric. di Mat. ».

[4] C. MIRANDA (1962) – *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Lioville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, « Ann. di Mat. », 189–212.

[5] R. SCHIANCHI (1975) – *Spazi di Sobolev dissimetrici e con peso*, « Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., di Napoli », ser. 4, *42*.

[6] L. N. SLOBODECKII (1966) – *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations*, Trad. in inglese « American Math. Soc. Trasl. », ser. 2, *57*.

[7] M. TROISI (1971) – *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi ellittiche*, « Ann. di Mat. Pura e Appl. », *90*, 331–412.