Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aurelio Cannizzo, Santi Valenti

Su talune condizioni di derivabilità applicabili ad insiemi di misura nulla

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.5, p. 318–323.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_5_318_0>

Funzioni di variabile reale. — *Su talune condizioni di derivabilità applicabili ad insiemi di misura nulla.* Nota di AURELIO CANNIZZO (*) e SANTI VALENTI (*), presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

RÉSUMÉ. — On assigne une nouvelle définition de presque absolue continuité, applicable à des ensembles de mesure nulle, et on en étudie quelque aspect. On la compare après avec une autre condition de dérivabilité presque partout, qui généralise elle aussi une condition auparavant donnée par B. Pettineo: on montre ainsi qu'entre eux subsiste, même dans la formulation étendue, une substantielle équivalence.

1. INTRODUZIONE

In [3] si dà una condizione (essenzialmente caratteristica) per la derivabilità quasi ovunque d'una funzione reale di variabile reale, condizione che appare di un certo interesse in quanto applicabile ad insiemi densi anche di misura nulla secondo Lebesgue. Una funzione soddisfacente a quella condizione viene detta ivi *quasi a variazione limitata*, generalizzando così l'uso di una nomenclatura dovuta a B. Pettineo [2]. Nondimeno, va ricordato che in [2] l'Autore mette in luce, - ai fini della derivabilità -, un aspetto assai profondo di questa problematica: l'equivalenza fra la nozione di funzione quasi a variazione limitata e quella, - pure da lui introdotta -, di funzione *quasi assolutamente continua.* (Precedentemente, anche A. Khintchine aveva adottato una siffatta denominazione [1], attribuendole però un'accezione più debole).

In relazione al risultato ottenuto in [3], appare quindi auspicabile, in primo luogo, estendere il concetto di quasi assoluta continuità agli insiemi densi (anche di misura nulla secondo Lebesgue) e, successivamente, dedurne l'equivalenza con la condizione di derivabilità introdotta da uno di noi (S.V.) in quella Nota.

In effetti, nel presente lavoro si ottiene, fra l'altro, il suddetto risultato, completando così l'estensione (nel senso precisato) del complesso teorema di B. Pettineo. (Analoga questione si era risolta in [4], con riferimento però alla derivazione asintotica).

(*) Gruppo Matematico della Facoltà d'Ingegneria (Cattedra di Analisi Matematica). Viale delle Scienze (Parco d'Orléans). 90128 Palermo.

(**) Nella seduta del 18 novembre 1977.

2. NOTAZIONI E RICHIAMI

Sia $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervallo della retta reale $\mathbf{R}$, $X \subset [a, b]$ un generico insieme di numeri reali, $Z \subset [a, b]$ un insieme denso in detto intervallo [1], $f(x)$ una funzione da Z in $\mathbf{R}$, $T \equiv [\alpha, \beta]$ un intervallo qualunque contenuto in $[a, b]$. Ciò posto, denoteremo con

i) $|f(T)|$, se esiste, il numero

$$\max\{|-\overline{\lim_{\substack{x,\alpha\\x\in Z}}} f(x) + \underline{\lim_{\substack{x,\beta\\x\in Z}}} f(x)|, |-\underline{\lim_{\substack{x,\alpha\\x\in Z}}} f(x) + \overline{\lim_{\substack{x,\beta\\x\in Z}}} f(x)|\}$$

ogniqualvolta sia $\alpha \notin Z$ e $\beta \notin Z$; il numero

$$\max\{|-f(\alpha) + \underline{\lim_{\substack{x,\beta\\x\in Z}}} f(x)|, |-f(\alpha) + \overline{\lim_{\substack{x,\beta\\x\in Z}}} f(x)|\}$$

$$(\max\{|-\underline{\lim_{\substack{x,\alpha\\x\in Z}}} f(x) + f(\beta)|, |-\overline{\lim_{\substack{x,\alpha\\x\in Z}}} f(x) + f(\beta)|\})$$

ogniqualvolta sia $\alpha \in Z$ e $\beta \notin Z$ ($\alpha \notin Z$ e $\beta \in Z$); il numero $|f(\beta) - f(\alpha)|$ ogniqualvolta sia $\alpha \in Z$ e $\beta \in Z$;

ii) $\mathbf{D}_n$ l'ennesima dicotomia di $[a, b]$:

iii) $N_n(X)$ il numero d'intervalli di $\mathbf{D}_n$ contenenti qualche punto di X internamente o come estremo destro;

iv) δ_n la norma di $\mathbf{D}_n$, ossia il numero $\dfrac{b-a}{2^n}$;

v) Z' un generico sottoinsieme di Z.

Diamo poi le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1. *Si dirà* «peso di Z' (relativo a Z)» *il numero*

$$w(Z', Z) = \lim_{n,\infty} \frac{N_n(Z')}{N_n(Z)}.$$

(La definizione è ben pòsta, come si riconoscerà osservando che il limite in considerazione esiste sempre; cfr. [3]).

DEFINIZIONE 2. *Si dirà che una famiglia finita* $\{T_j\}$ *di intervalli chiusi e a due a due privi di punti interni in comune* « chiude strettamente » Z' *in* Z *se*

1) *ogni intervallo della famiglia ha estremi in* Z;

(1) Per semplicità faremo l'ipotesi (per quanto inessenziale ai fini del risultato) che a e b appartengano a Z.

2) *ogni punto di* Z' *(ad eccezione eventualmente del minimo, se coincidente con* a*, e del massimo, se coincidente con* b*) o è interno a qualche intervallo della famiglia, o è estremo comune di due di essi*;

3) *ogni intervallo della famiglia contiene almeno un punto di* Z';

4) *il minimo (il massimo) di* Z'*, qualora esista e coincida con* a *(con* b*), è estremo sinistro (destro) di un intervallo della famiglia.*

DEFINIZIONE 3. *Si dirà che la funzione* $f(x)$ *è* « a variazione limitata in Z' » *se esistono due numeri positivi* K *e* δ *tali che riesca* $\Sigma_j \, | f(T_j) | \leq K$, *per ogni famiglia* $\{T_j\}$ *che chiuda strettamente* Z' *in* Z *e di norma minore di* δ.

DEFINIZIONE 4. *Si dirà che* $f(x)$ *è* « quasi a variazione limitata in Z » *se, per ogni numero positivo* ε*, vi è un sottoinsieme* Z' *di* Z *di peso maggiore di di* $1 - \varepsilon$ *nel quale* $f(x)$ *sia a variazione limitata.*

Come accennato in 1, le definizioni date consentono di pervenire al Teorema (dimostrato in [3]): « *Se* $f(x)$ *è uniformemente continua e quasi a variazione limitata in* Z*, la sua estensione continua ad* $[a, b]$ *vi è quasi ovunque derivabile; se, viceversa, una funziune è quasi ovunque derivabile in* $[a, b]$*, allora vi è almeno un insieme* Z^* *(di misura nulla, se si vuole), denso in* $[a, b]$*, ove la restrizione di detta funzione è quasi a variazione limitata* ». Appare quindi assai naturale domandarsi se e quali legami intercorrano con la quasi assoluta continuità [2]; è di questo, appunto, che ora ci occuperemo.

3. L'ASSOLUTA CONTINUITÀ E LA VARIAZIONE

Premettiamo la

DEFINIZIONE 5. *Si dirà che una famiglia finita* $\{D_j^n\}$ *di intervalli chiusi* contenuti in $[a, b]$ *e a due a due privi di punti interni in comune* « chiude » Z' *in* Z « rispetto a $\mathbf{D}_n$ » *se ogni intervallo della famiglia data contiene punti di* Z', *ma nessuno contiene internamente punti dicotomici relativi a* $\mathbf{D}_n$. $\Big($Nel contesto, $\dfrac{N_n(Z')}{N_n(Z)}$ si chiamerà « *parametro di* $\{D_j^n\}$ »$\Big)$.

Siamo così in grado di dare la seguente

DEFINIZIONE 6. *Si dirà che la funzione* $f(x)$ *è* « Z–assolutamente continua in Z' » *se, per ogni numero positivo* ε*, vi è un numero positivo* δ *tale che, qualunque sia* $Z'' \subset Z'$*, purchè di peso minore di* δ*, e qualunque sia la famiglia* $\{D_j^n\}$ *che chiude* Z'' *in* Z *rispetto a* $\mathbf{D}_n$*, purchè di parametro minore di* δ*, riesca* $\Sigma_j \, | f(D_j^n) | < \varepsilon$.

DEFINIZIONE 7. *Si dirà che la funzione* $f(x)$ *è* « quasi Z–assolutamente continua in Z » *se, per ogni numero positivo* ε*, vi è un sottoinsieme* Z' *di* Z *di peso maggiore di* $1 - \varepsilon$ *nel quale* $f(x)$ *sia* Z*–assolutamente continua.*

Una funzione per cui valga la proprietà espressa dalla Definizione 6 (Definizione 7) si chiamerà, abbreviando, Z — AC (q. Z — AC). La giustificazione, poi, della nomenclatura da noi adottata in queste definizioni risiede nel seguente

TEOREMA 1. *Se* $f(x)$ *è* Z — AC *in* $[a, b]$, *essa vi è* AC *nel senso di Vitali*; *e viceversa.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e si assuma $\delta > 0$ in corrispondenza, a norma della Definizione 6. Sia poi $\{I_k\}$ un qualunque sistema d'intervalli chiusi, in numero finito, tutti contenuti in $[a, b]$ e a due a due privi di punti interni in comune, di ampiezza complessiva minore di $\delta \cdot (b - a)$. Ovviamente, il peso della loro unione, valutato rispetto a $[a, b]$, riuscirà minore di δ; dimodochè esisterà un naturale tale che, da questo in poi, per ogni $\mathbf{D}_n$ si abbia

$$\frac{N_n(\cup_k I_k)}{N_n([a, b])} < \delta .$$

Detto allora $\bar{n}$ il primo fra tali naturali per il quale nessun elemento di di $\{I_k\}$ sia propriamente contenuto in qualche elemento di $\mathbf{D}_{\bar{n}}$, si denotino rispettivamente con $\{\Delta_{\bar{n},i}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, 2^{\bar{n}})$ e con $\{\Delta_{\bar{n},i_k}\}$ il sistema degli intervalli di $\mathbf{D}_{\bar{n}}$ e il suo sottosistema formato da quegli elementi che sono propriamente contenuti nel generico I_k; $J_{1,k}$ $(J_{2,k})$ indichi infine il complementare sinistro (destro) dell'unione degli intervalli di $\{\Delta_{\bar{n},i_k}\}$ rispetto ad I_k.

Ora, la famiglia d'intervalli ottenuta riunendo, rispetto a k, tutti i $\Delta_{\bar{n},i_k}$ e tutti i $J_{m,k}$ $(m = 1, 2)$ è tale da chiudere l'unione degli I_k in $[a, b]$ rispetto a $\mathbf{D}_{\bar{n}}$ ed ha parametro minore di δ. Sarà quindi:

$$\Sigma_k |f(I_k)| \leq \Sigma_k [|f(I_{1,k})| + \Sigma_{i_k} |f(\Delta_{\bar{n},i_k})| + |f(J_{2,k})|] < \varepsilon ,$$

donde, pòsto $\sigma = \delta \cdot (b - a)$, l'assoluta continuità nel senso di Vitali.

Viceversa, si assuma $\varepsilon > 0$ e si stabilisca in corrispondenza $\delta > 0$, a norma dell'ipotesi di assoluta continuità nel senso di Vitali. Posto allora $\sigma = \dfrac{\delta}{b - a}$, quale che sia $E \subset [a, b]$, purchè di peso minore di σ, riuscirà definitivamente

$$\frac{N_n(E)}{N_n([a, b])} < \sigma .$$

Sicchè, con la solita notazione per la $\mathbf{D}_n$ e chiamando ancora $\{I_k\}$ un qualunque sistema finito d'intervalli del tipo già usato, purchè tale che ciascuno di essi contenga punti di E e sia contenuto in qualche $\Delta_{n,i}$, si avrà

$$\frac{\Sigma_k \operatorname{mis}(I_k)}{b - a} \leq \frac{\Sigma_i \operatorname{mis}(\Delta_{n,i})}{b - a} = \frac{N_n(E) \cdot \delta_n}{N_n([a, b]) \cdot \delta_n} < \sigma ;$$

ossia $\Sigma_k \operatorname{mis}(\mathrm{I}_k) < \delta$. E poichè, per l'ipotesi, ciò comporta

$$\Sigma_k \,|\, f(\mathrm{I}_k) \,| < \varepsilon$$

e il parametro di $\{\mathrm{I}_k\}$ è minore di σ, risulta provato che $f(x)$ è Z — AC.

Non dimostreremo, in quanto parentetico e non difficile a conseguirsi, il risultato consistente nell'*uniforme continuità delle funzioni* Z — AC; richiamiamo invece una proprietà delle funzioni a variazione limitata, della quale, pur lasciando ancora una volta al lettore la dimostrazione, faremo uso nel seguito. Tale proprietà è espressa attraverso il seguente

LEMMA 1. *Se $f(x)$ è a variazione limitata in un numero finito di sottoinsiemi di Z, essa lo è anche nella loro unione.*

Su questo Lemma, appunto, si poggia il primo teorema di collegamento fra la nozione di funzione a variazione limitata in Z e quella di funzione Z — AC. Si tratta del

TEOREMA 2. *Se $f(x)$ è* Z — AC *in Z', essa vi è a variazione limitata.*

Dimostrazione. Supponiamo, procedendo per assurdo, che $f(x)$ non sia a variazione limitata in Z', pur essendovi Z — AC. Sia allora $\varepsilon > 0$ e si assuma δ in corrispondenza, a norma della Definizione 6. Sia poi $\mathbf{D}_{\bar{n}}$ una dicotomia di norma minore di $\delta \cdot (b - a)$ e i cui elementi si indichino, al solito, con $\Delta_{\bar{n},i}$. Detta Z_i l'intersezione di Z' con l'i–esimo elemento di $\mathbf{D}_{\bar{n}}$, sarà senz'altro $w(\mathrm{Z}_i, \mathrm{Z}) < \delta$, nonchè

$$\frac{\mathrm{N}_{\bar{n}}(\mathrm{Z}_i)}{\mathrm{N}_{\bar{n}}(\mathrm{Z})} = \frac{1 \cdot \delta_{\bar{n}}}{\mathrm{N}_{\bar{n}}(\mathrm{Z}) \cdot \delta_{\bar{n}}} = \frac{\delta_{\bar{n}}}{b - a} < \delta \,.$$

Ma d'altra parte, per l'ipotesi e in virtù del Lemma 1, almeno uno degli Z_i, e diciamolo Z_{i_0}, è tale che in esso $f(x)$ non risulti a variazione limitata; vi sarà quindi, anche in corrispondenza ad ε e senza riguardo per la sua norma, una famiglia $\{\mathrm{T}_{0,j}\}$ che chiude strettamente Z_{i_0} in Z e per la quale riuscirà

$$\Sigma_j \,|\, f(\mathrm{T}_{0,j}) \,| > \varepsilon \,.$$

Supposto ora, come è lecito, che sia $\cup_j \mathrm{T}_{0,j} \subset \Delta_{\bar{n},i_0}$ e che quindi $\{\mathrm{T}_{0,j}\}$ chiuda Z_{i_0} in Z rispetto a $\mathbf{D}_{\bar{n}}$, detta famiglia avrà, per quanto visto sopra, parametro minore di δ; dovrà dunque risultare

$$\Sigma_j \,|\, f(\mathrm{T}_{0,j}) \,| < \varepsilon \,,$$

donde l'assurdo.

Dal teorema appena dimostrato si trae subito, come corollario: « *Se $f(x)$ è* q. Z — AC *in Z, essa vi è quasi a variazione limitata* ».

Prima di dare la proposizione essenzialmente inversa di questa, avvertiamo che si supporrà la $f(x)$ uniformemente continua in Z; ciò al solo scopo di poter fare riferimento alla sua estensione continua $F(x)$ ad $[a, b]$. Premettiamo altresì il seguente

LEMMA 2. *Se* $F(x)$ *è assolutamente continua* (nel senso di B. Pettineo [2]) *nella chiusura* $\bar{Z}'$ *di* Z' *allora* $f(x)$ *è* Z — AC *in* Z'.

Dimostrazione. Basta osservare che, se una famiglia di intervalli soddisfa al requisito della Definizione 6, essa soddisfa anche al requisito della definizione di assoluta continuità di una funzione in un chiuso, data in [2].

Possiamo ora concludere, dimostrando il

TEOREMA 3. *Se* $f(x)$ *è quasi a variazione limitata in* Z, *allora esiste un insieme* Z^*, *anch'esso denso in* $[a, b]$ (*e se si vuole, di misura nulla*), *nel quale la restrizione di* $F(x)$ *è* q. Z^* — AC.

Dimostrazione. Intanto, per l'ipotesi, $F(x)$ risulterà, come dimostrato in [3], quasi a variazione limitata (anche nel senso di B. Pettineo [2]) in $[a, b]$ e, di conseguenza, ivi quasi assolutamente continua (sempre nel senso di [2]). Sia allora $\{\sigma_n\}$ una zero–successione decrescente di numeri positivi; si potrà, in virtù di quanto detto, associare a questa una successione $\{C_n\}$ di chiusi per i quali

$$0 \leq b - a - \text{mis}(C_n) < \sigma_n \cdot (b - a)$$

e in ciascuno dei quali $F(x)$ è assolutamente continua [2].

Se adesso, per ogni n, si denota con Z_n^* un insieme denso in C_n, si può scrivere senz'altro: $1 - w(Z_n^*, Z^*) < \sigma_n$, dove con Z^* si designi l'unione, rispetto ad n, di tutti gli Z_n^*. Di più, per il Lemma 2, la restrizione di $F(x)$ a ciascuno di questi insiemi vi è Z^* — AC.

Sicchè, ove si consideri che Z^* è denso in $[a, b]$ (2), la tesi è provata.

(È appena il caso di notare che, sulla base di [2] e di [3], il lettore potrà dedurre senza sforzo i teoremi di collegamento con la derivabilità q.o.).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. KHINTCHINE (1927) – *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, « Fund. Math. », *9*, 212.

[2] B. PETTINEO (1965) – *Sulla derivabilità delle funzioni*, «Atti Acc. Naz. Lincei (Memorie)», ser. VIII, *7* (6).

[3] S. VALENTI (1973) – *On the differentiability of functions whose values are assigned on 0–measure sets*, « Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées », *18*, 1283.

[4] S. VALENTI *et alii* (1974) – *A condition on null sets for the approximate differentiability*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *56* (5), 698.

(2) E, se si vuole, lo si può ottenere di misura nulla.