
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

UMBERTO RICCIUTI, ANTONIO GENTILE

**Analisi dinamica dei gusci sferici ortotropi ribassati.
Le vibrazioni libere assialsimmetriche**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 63 (1977), n.3-4, p.
240-252.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_3-4_240_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei solidi. — *Analisi dinamica dei gusci sferici ortotropi ribassati. Le vibrazioni libere assialsimmetriche* (*). Nota (**) di UMBERTO RICCIUTI e ANTONIO GENTILE (***), presentata dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — We study the problem of the axially symmetric transverse free vibrations of orthotropic shallow spherical shells. We solve the equation of motion by means of series expansions and we deduce the frequency equation for a shell segment with clamped edge.

SIMBOLOGIA

R	raggio della superficie sferica;
r_0	raggio di base del guscio;
r	raggio del generico parallelo;
w, u	componenti dello spostamento nella direzione normale alla superficie media e della tangente al meridiano;
F	funzione degli sforzi;
t	spessore del guscio;
$E_r, E_\theta, \nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$	costanti elastiche;
K_r, K_θ, K_ν	rigidezze flessionali;
d_r, d_θ, d_ν	coefficienti di deformazione estensionali;
$\lambda^2 = \frac{K_\theta}{K_r} = \frac{d_r}{d_\theta} = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{\nu_{r\theta}}$;	
μ	densità superficiale di massa;
ω, f	pulsazione e frequenza delle vibrazioni libere.

I. INTRODUZIONE

Proseguendo nell'analisi dei gusci sferici ortotropi ribassati su pianta circolare iniziata in un precedente Lavoro [4], se ne intraprende lo studio in campo dinamico risolvendo il problema delle vibrazioni libere trasversali assialsimmetriche. Poichè si fanno le consuete ipotesi sulla struttura elastica e geometrica del guscio (ortotropia cilindrica, costanza delle caratteristiche elastiche e geometriche, etc.) ed il problema è notoriamente riconducibile, in virtù del principio di D'Alembert, al corrispondente problema statico, il presente studio muove dalle equazioni fondamentali dedotte nella Nota richiamata. Si assumono inoltre quali incognite le medesime funzioni, ossia la componente w dello spostamento normale alla superficie media e la funzione F degli sforzi ivi definita.

(*) Ricerca eseguita con il contributo C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1977.

(***) Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Bari.

Trascurate, com'è lecito in virtù del ribassamento del guscio le forze d'inerzia longitudinali rispetto a quelle trasversali, si ricercano le autofunzioni sotto forma di sviluppi in serie di potenze, estendendo al caso della volta ribassata un procedimento d'integrazione già adottato nella trattazione dell'analogo problema della piastra piana circolare [5]. Si indica una particolare forma sotto cui è utile porre le autosoluzioni ai fini della ricerca degli autovalori e si studia dettagliatamente il caso del guscio chiuso incastrato al bordo giungendo all'equazione delle frequenze e sviluppando alcuni esempi numerici.

2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA E RICERCA DELLE AUTOSOLUZIONI

Il problema delle vibrazioni libere trasversali assialsimmetriche in un guscio sferico ortotropo ribassato è retto, nelle ipotesi innanzi ricordate, dal sistema di equazioni differenziali:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_r \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) - K_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \\ \quad - \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial (rF)}{\partial r} = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ d_\theta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) - d_r \frac{F}{r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \end{array} \right.$$

Analizzando i moti a carattere stazionario, ossia ricercando le soluzioni a variabili separate:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(r, t) = W(r) e^{i\omega t} \\ F(r, t) = \Phi(r) e^{i\omega t}, \end{array} \right.$$

il problema è ricondotto all'integrazione del sistema di equazioni alle derivate totali:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \lambda^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} \right) - \\ \quad - \beta^4 W - \frac{1}{K_r R} \frac{1}{r} \frac{d(r\Phi)}{dr} = 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} \Phi + \frac{1}{d_\theta R} \frac{dW}{dr} = 0 \end{array} \right.$$

dove è posto:

$$(4) \quad \beta^4 = \mu \frac{\omega^2}{K_r}.$$

Integrali particolari del sistema (3) possono ricercarsi sotto forma di sviluppi in serie di potenze del tipo:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{4n+s} \\ \Phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{4n+i} \end{array} \right.$$

I coefficienti degli sviluppi e gli indici caratteristici si ricavano imponendo alle (5) il rispetto delle (3). Così procedendo si perviene, com'è immediato verificare, alle eguaglianze polinomiali:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(4n+s-1)^2 - 1] [(4n+s-1)^2 - \lambda^2] r^{4(n-1)} - \\ - \beta^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{4n} = \frac{1}{K_r R} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (4n+i+1) r^{4n+i-s-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n [(4n+i)^2 - \lambda^2] r^{4n+i-s-1} + \frac{1}{d_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (4n+s) r^{4n} = 0 \end{array} \right.$$

Se si sceglie tra gli indici caratteristici il legame:

$$i = s + 1$$

le (6) diventano:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(4n+s-1)^2 - 1] [(4n+s-1)^2 - \lambda^2] r^{4(n-1)} - \\ - \beta^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{4n} = \frac{1}{K_r R} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (4n+s+2) r^{4n} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n [(4n+s+1)^2 - \lambda^2] r^{4n} + \frac{1}{d_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (4n+s) r^{4n} = 0 \end{array} \right.$$

e si traducono, in virtù del principio di identità dei polinomi, nelle relazioni:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 [(s-1)^2 - 1] [(s-1)^2 - \lambda^2] = 0 \\ b_0 [(s+1)^2 - \lambda^2] + \frac{s}{d_0 R} a_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n [(4n+s-1)^2 - 1] [(4n+s-1)^2 - \lambda^2] - \beta^4 a_{n-1} = \\ = \frac{1}{K_r R} b_{n-1} (4n+s-2) \\ b_n [(4n+s+1)^2 - \lambda^2] + \frac{1}{d_0 R} a_n (4n+s) = 0 \quad (n \geq 1) \end{array} \right.$$

La prima delle (8), se si sceglie $a_0 \neq 0$, conduce all'equazione algebrica:

$$(9) \quad [(s-1)^2 - 1] [(s-1)^2 - \lambda^2] = 0$$

che determina i quattro valori dell'indice caratteristico:

$$(10) \quad s_1 = 0 \quad ; \quad s_2 = 2 \quad ; \quad s_3 = 1 - \lambda \quad ; \quad s_4 = 1 + \lambda$$

mentre la seconda fornisce:

$$b_0 = - \frac{1}{d_0 R} \frac{s}{(s+1)^2 - \lambda^2} a_0.$$

È agevole poi pervenire sulla scorta delle (8') alle formule ricorrenti valide per i coefficienti successivi:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{[(4n+s-1)^2-1][(4n+s-1)^2-\lambda^2]} \cdot \left[\beta^4 - \frac{(4n+s-3)^2-1}{(4n+s-3)^2-\lambda^2} \alpha^4 \right] a_{n-1} \\ b_n &= - \frac{1}{d_0 R} \frac{4n+s}{(4n+s+1)^2-\lambda^2} a_n \end{aligned} \right. \quad (n \geq 1)$$

in cui si è posto:

$$(12) \quad \alpha^4 = \frac{1}{K_r d_0 R^2}.$$

Attribuendo all'indice caratteristico s ciascuno dei valori (10) possono ricavarsi quattro integrali linearmente indipendenti del sistema (3). Il generico, posto $a_0 = 1$, assume la forma:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} W_j &= r^{sj} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{[(4k+s_j-1)^2-1][(4k+s_j-1)^2-\lambda^2]} \cdot \left[\beta^4 - \frac{(4k+s_j-3)^2-1}{(4k+s_j-3)^2-\lambda^2} \alpha^4 \right] \right\} \\ \Phi_j &= - \frac{r^{sj+1}}{d_0 R} \left\{ \frac{s_j}{(s_j+1)^2-\lambda^2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n} \frac{4n+s_j}{(4n+s_j+1)^2-\lambda^2} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{[(4k+s_j+1)^2-1][(4k+s_j-1)^2-\lambda^2]} \cdot \left[\beta^4 - \frac{(4k+s_j-3)^2-1}{(4k+s_j-3)^2-\lambda^2} \alpha^4 \right] \right\} \end{aligned} \right. \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Se si sceglie tra gli indici caratteristici il legame:

$$i = s - 3$$

le eguaglianze (6) diventano:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(4n+s-1)^2-1][(4n+s-1)^2-\lambda^2] r^{4(n-1)} - \\ - \beta^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{4n} &= \frac{1}{K_r R} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (4n+s-2) r^{4(n-1)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n [(4n+s-3)^2-\lambda^2] r^{4(n-1)} + \frac{1}{d_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (4n+s) r^{4n} &= 0 \end{aligned} \right.$$

e richiedono che siano soddisfatte le:

$$(15) \quad \begin{cases} a_0 [(s-1)^2 - 1] [(s-1)^2 - \lambda^2] = \frac{1}{K_r R} b_0 (s-2) \\ b_0 [(s-3)^2 - \lambda^2] = 0, \end{cases}$$

$$(15') \quad \begin{cases} a_n [(4n+s-1)^2 - 1] [(4n+s-1)^2 - \lambda^2] - \beta^4 a_{n-1} = \\ = \frac{1}{K_r R} b_n (4n+s-2) \\ b_n [(4n+s-3)^2 - \lambda^2] + \frac{1}{d_0 R} a_{n-1} (4n+s-4) = 0 \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Posto $b_0 \neq 0$, dalla seconda delle (15) scaturisce l'equazione caratteristica:

$$(16) \quad (s-3)^2 - \lambda^2 = 0$$

che fornisce per l'indice s l'ulteriore coppia di valori:

$$(17) \quad s_5 = 3 - \lambda \quad ; \quad s_6 = 3 + \lambda,$$

mentre dalla prima si trae:

$$a_0 = \frac{1}{K_r R} \frac{b_0}{s [(s-1)^2 - \lambda^2]}.$$

Le (15') consentono di ricavare per i coefficienti successivi le espressioni ricorrenti:

$$(18) \quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{[(4n+s-5)^2 - \lambda^2] [(4n+s-3)^2 - \lambda^2]} \cdot \left[\frac{(4n+s-7)^2 - \lambda^2}{(4n+s-7)^2 - 1} \beta^4 - \alpha^4 \right] b_{n-1} \\ a_n = - \frac{1}{\alpha^4 K_r R} \frac{(4n+s+1)^2 - \lambda^2}{4n+s} b_{n+1} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Si dispone così di un'altra coppia di integrali linearmente indipendenti⁽¹⁾ dal sistema (3), ottenibile attribuendo all'indice s i valori (17). Posto $b_0 = 1$,

(1) Per il guscio isotropo ($\lambda = 1$) non tutte le radici delle (9) e (16) sono distinte, risultando:

$$s_1 = s_3 = 0 \quad ; \quad s_2 = s_4 = s_5 = 2 \quad ; \quad s_6 = 4.$$

Può ricorrersi in tal caso alle classiche soluzioni di cui alle Note [1], [2], [3] della Bibliografia. Tuttavia la soluzione qui proposta continua ad essere valida purchè il guscio sia privo di foro centrale.

il generico di essi presenta l'aspetto:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} W_j &= \frac{r^{s_j}}{K_r R} \left\{ \frac{1}{s_j [(s_j - 1)^2 - \lambda^2]} - \frac{1}{\alpha^4} \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n} \frac{(4n + s_j + 1)^2 - \lambda^2}{4n + s_j} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{[(4k + s_j - 5)^2 - \lambda^2] [(4k + s_j - 3)^2 - \lambda^2]} \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{(4k + s_j - 7)^2 - \lambda^2}{(4k + s_j - 7)^2 - 1} \beta^4 - \alpha^4 \right] \right\} \\ \Phi_j &= r^{s_j - 3} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{[(4k + s_j - 5)^2 - \lambda^2] [(4k + s_j - 3)^2 - \lambda^2]} \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{(4k + s_j - 7)^2 - \lambda^2}{(4k + s_j - 7)^2 - 1} \beta^4 - \alpha^4 \right] \right\} \quad (j = 5, 6). \end{aligned} \right.$$

Se si introducono le funzioni:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Phi}_j &= -d_0 R \Phi_j & (j = 1, 2, 3, 4) \\ \bar{W}_j &= K_r R W_j & (j = 5, 6) \end{aligned} \right.$$

la generica autosoluzione assume l'aspetto:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= C_1 W_1 + C_2 W_2 + C_3 W_3 + C_4 W_4 + \frac{1}{K_r R} (C_5 \bar{W}_5 + C_6 \bar{W}_6) \\ \Phi &= -\frac{1}{d_0 R} (C_1 \bar{\Phi}_1 + C_2 \bar{\Phi}_2 + C_3 \bar{\Phi}_3 + C_4 \bar{\Phi}_4) + C_5 \Phi_5 + C_6 \Phi_6. \end{aligned} \right.$$

Essa esprime tutte le configurazioni semplici che la struttura vibrante può assumere, essendo le rispettive frequenze determinate dalle condizioni al contorno; vale nella forma (21) per il caso generale di guscio a due bordi, mentre diventa:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= C_1 W_1 + C_4 W_4 + \frac{C_6}{K_r R} \bar{W}_6 \\ \Phi &= -\frac{1}{d_0 R} (C_1 \bar{\Phi}_1 + C_4 \bar{\Phi}_4) + C_6 \Phi_6 \end{aligned} \right.$$

nel caso di guscio privo di foro centrale, dovendosi in quest'ultima ipotesi porre:

$$C_2 = C_3 = C_5 = 0,$$

causa le singolarità che le funzioni W_2, W_3, Φ_5 presentano per $r = 0$.

Può rilevarsi agevolmente che, qualora si faccia tendere ad infinito il raggio R della superficie sferica, la prima delle (21) fornisce la generica autofunzione polarsimmetrica nel problema delle vibrazioni libere trasversali

della piastra piana ortotropa ⁽²⁾ e che le (21) stesse forniscono, quando vi si ponga $\beta = 0$, l'integrale generale nel problema statico del guscio ortotropo sollecitato esclusivamente al contorno in condizioni di simmetria polare.

3. RICERCA DEGLI AUTOVALORI

Ai fini della ricerca degli autovalori è opportuno porre le funzioni introdotte nelle forme seguenti:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) z^{4n} \\ \bar{\Phi}_1 = r \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right. \quad (24) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_2 = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) z^{4n} \\ \bar{\Phi}_2 = r^3 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_3 = r^{1-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) z^{4n} \\ \bar{\Phi}_3 = r^{2-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right. \quad (26) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_4 = r^{1+\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) z^{4n} \\ \bar{\Phi}_4 = r^{2+\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{D}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right.$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_5 = r^{3-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) z^{4n} \\ \Phi_5 = r^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{E}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right. \quad (28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_6 = r^{3+\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) z^{4n} \\ \Phi_6 = r^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_n(x) z^{4n}, \end{array} \right.$$

in cui compaiono le variabili:

$$(29) \quad x = \alpha r \quad ; \quad z = \frac{\beta}{\alpha}$$

e gli sviluppi:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} A_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{A}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{A}_n^{(i)} x^{4i}, \end{array} \right. \quad (31) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} B_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{B}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{B}_n^{(i)} x^{4i}, \end{array} \right.$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} C_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{C}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{C}_n^{(i)} x^{4i}, \end{array} \right. \quad (33) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} D_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{D}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{D}_n^{(i)} x^{4i}, \end{array} \right.$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} E_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{E}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{E}_n^{(i)} x^{4i}, \end{array} \right. \quad (35) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} F_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{F}_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{F}_n^{(i)} x^{4i}. \end{array} \right.$$

(2) Cfr. la cit. Nota [5] della Bibliografia.

I coefficienti delle (30)–(35), fatte le posizioni:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_k = \frac{(4k-3)^2 - \lambda^2}{(4k-3)^2 - 1} & a_k = \frac{1}{\alpha_k [(4k-1)^2 - 1] [(4k-1)^2 - \lambda^2]} \\ \beta_k = \frac{(4k-1)^2 - \lambda^2}{(4k-1)^2 - 1} & b_k = \frac{1}{\beta_k [(4k+1)^2 - 1] [(4k+1)^2 - \lambda^2]} \\ \gamma_k = \frac{(4k-2-\lambda)^2 - \lambda^2}{(4k-2-\lambda)^2 - 1} & c_k = \frac{1}{\gamma_k [(4k-\lambda)^2 - 1] [(4k-\lambda)^2 - \lambda^2]} \\ \delta_k = \frac{(4k-2+\lambda)^2 - \lambda^2}{(4k-2+\lambda)^2 - 1} & d_k = \frac{1}{\delta_k [(4k+\lambda)^2 - 1] [(4k+\lambda)^2 - \lambda^2]} \\ \varepsilon_k = \frac{(4k-4-\lambda)^2 - \lambda^2}{(4k-4-\lambda)^2 - 1} & e_k = \frac{1}{[(4k-2-\lambda)^2 - \lambda^2] [(4k-\lambda)^2 - \lambda^2]} \\ \varphi_k = \frac{(4k-4+\lambda)^2 - \lambda^2}{(4k-4+\lambda)^2 - 1} & f_k = \frac{1}{[(4k-2+\lambda)^2 - \lambda^2] [(4k+\lambda)^2 - \lambda^2]} \end{array} \right.$$

sono esprimibili attraverso le:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_0^{(0)} = 8(9 - \lambda^2) & A_0^{(i)} = 0 \\ A_1^{(1)} = 1 & A_1^{(i)} = \prod_{k=2}^i a_k \\ A_n^{(i)} = A_1^{(i)} \sum_{h=1}^{(i-1)} \pi_h^{(\alpha)} & A_n^{(i)} = \frac{4^i}{(4^i + 1)^2 - \lambda^2} A_n^{(i)}, \end{array} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0^{(0)} = C_0^{(0)} = D_0^{(0)} = E_0^{(0)} = F_0^{(0)} = 1, \\ B_0^{(i)} = \prod_{k=1}^i b_k, \quad C_0^{(i)} = \prod_{k=1}^i c_k, \quad D_0^{(i)} = \prod_{k=1}^i d_k, \quad E_0^{(i)} = \prod_{k=1}^i e_k, \\ F_0^{(i)} = \prod_{k=1}^i f_k, \\ B_n^{(i)} = \sum_{h=1}^{(i)} \pi_h^{(\beta)}, \quad \bar{B}_n^{(i)} = \frac{4^i + 2}{(4^i + 3)^2 - \lambda^2} B_n^{(i)}, \\ C_n^{(i)} = \sum_{h=1}^{(i)} \pi_h^{(\gamma)}, \quad \bar{C}_n^{(i)} = \frac{4^i + 1 - \lambda}{(4^i + 2 - \lambda)^2 - \lambda^2} C_n^{(i)}, \\ D_n^{(i)} = \sum_{h=1}^{(i)} \pi_h^{(\delta)}, \quad \bar{D}_n^{(i)} = \frac{4^i + 1 + \lambda}{(4^i + 2 + \lambda)^2 - \lambda^2} D_n^{(i)}, \\ E_n^{(i)} = \sum_{h=1}^{(i-1)} \pi_h^{(\varepsilon)}, \quad \bar{E}_n^{(i)} = \frac{(4^i + 4 - \lambda)^2 - \lambda^2}{4^i + 3 - \lambda} E_n^{(i+1)}, \\ F_n^{(i)} = \sum_{h=1}^{(i-1)} \pi_h^{(\varphi)}, \quad \bar{F}_n^{(i)} = \frac{(4^i + 4 + \lambda)^2 - \lambda^2}{4^i + 3 + \lambda} F_n^{(i+1)}, \end{array} \right.$$

ove con $\pi_h^{(\alpha)}$, $\pi_h^{(\beta)}$, $\pi_h^{(\gamma)}$, $\pi_h^{(\delta)}$, $\pi_h^{(\varepsilon)}$, $\pi_h^{(\varphi)}$ sono indicati rispettivamente uno dei prodotti di $(n-1)$ termini scelti tra gli $(i-1)$ coefficienti α_k (con $2 \leq k \leq i$), uno dei prodotti di n termini scelti tra gli i coefficienti β_k o γ_k o δ_k (con $1 \leq k \leq i$), uno dei prodotti di n termini scelti tra gli $(i-1)$ coefficienti ε_k o φ_k (con $2 \leq k \leq i$).

Le condizioni al contorno consentono di determinare le successioni indefinite di autovalori corrispondenti ai vari modi di vibrare della struttura. Si perviene in ogni caso ad un'equazione algebrica di grado infinito la cui struttura dipende ovviamente dalle condizioni di vincolo ipotizzate.

A titolo esemplificativo si ricava l'equazione delle frequenze valida per il guscio chiuso perfettamente incastrato al bordo. Per esso la soluzione vale nella forma (22) e le condizioni di vincolo:

$$(39) \quad w = 0 \quad ; \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad , \quad u = 0, \quad (r = r_0)$$

conducono al sistema algebrico:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 C_1 + W_4 C_4 + \frac{\bar{W}_6}{K_r R} C_6 = 0 \\ \frac{dW_1}{dr} C_1 + \frac{dW_4}{dr} C_4 + \frac{d\bar{W}_6}{dr} \frac{C_6}{K_r R} = 0 \\ \left(\frac{d\bar{\Phi}_1}{dr} - \nu_{0r} \frac{\bar{\Phi}_1}{r} \right) C_1 + \left(\frac{d\bar{\Phi}_4}{dr} - \nu_{0r} \frac{\bar{\Phi}_4}{r} \right) C_4 - \\ - d_0 R \left(\frac{d\Phi_6}{dr} - \nu_{0r} \frac{\Phi_6}{r} \right) C_6 = 0 \end{array} \right. \quad (r = r_0).$$

L'equazione delle frequenze scaturisce dalla condizione che assicura per il sistema (40) soluzioni diverse da quella banale; essa si scrive:

$$(41) \quad \left(\frac{d\bar{\Phi}_1}{dr} - \nu_{0r} \frac{\bar{\Phi}_1}{r} \right) \left(W_4 \frac{d\bar{W}_6}{dr} - \bar{W}_6 \frac{dW_4}{dr} \right) - \\ - \left(\frac{d\bar{\Phi}_4}{dr} - \nu_{0r} \frac{\bar{\Phi}_4}{r} \right) \left(W_1 \frac{d\bar{W}_6}{dr} - \bar{W}_6 \frac{dW_1}{dr} \right) - \\ - \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{d\Phi_6}{dr} - \nu_{0r} \frac{\Phi_6}{r} \right) \left(W_1 \frac{dW_4}{dr} - W_4 \frac{dW_1}{dr} \right) = 0 \quad (r = r_0)$$

e può essere posta sotto la forma seguente utile per il calcolo delle radici:

$$(42) \quad \sum_{s=0}^{\infty} G_s y^s = 0 \quad (y = z^4).$$

I coefficienti della (42) hanno l'espressione:

$$(43) \quad G_s = \sum_{j=0}^s \sum_{n=0}^j \left[A_{s-j}^* (D_n \bar{F}'_{j-n} - D'_n \bar{F}_{j-n}) - D_{s-j}^* (A_n \bar{F}'_{j-n} - A'_n \bar{F}_{j-n}) - \frac{F_{s-j}^*}{x_0^4} (A_n D'_{j-n} - A'_n D_{j-n}) \right]$$

e contengono, oltre agli sviluppi A_n, D_n, \bar{F}_n già definiti attraverso le (30), (33), (35), gli sviluppi $A'_n, A_n^*, D'_n, D_n^*, \bar{F}'_n, F_n^*$ definiti dalle:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_n &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} A_n^{(i)} x^{4i} \\ D'_n &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} D_n^{(i)} x^{4i} \\ \bar{F}'_n &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} \bar{F}_n^{(i)} x^{4i}, \end{aligned} \right. \quad (45) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n^* &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} A_n^{*(i)} x^{4i} \\ D_n^* &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} D_n^{*(i)} x^{4i} \\ F_n^* &= \sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n+i} F_n^{*(i)} x^{4i}, \end{aligned} \right.$$

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n^{(i)} &= 4i A_n^{(i)} \\ D_n^{(i)} &= (4i + 1 + \lambda) D_n^{(i)} \\ \bar{F}_n^{(i)} &= (4i + 3 + \lambda) \bar{F}_n^{(i)}, \end{aligned} \right. \quad (47) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n^{*(i)} &= \frac{4i + 1 - \nu_{0r}}{(4i + 1)^2 - \lambda^2} A_n^{(i)} \\ D_n^{*(i)} &= \frac{4i + 2 + \lambda - \nu_{0r}}{(4i + 2 + \lambda)^2 - \lambda^2} D_n^{(i)} \\ F_n^{*(i)} &= (4i + \lambda - \nu_{0r}) F_n^{(i)}. \end{aligned} \right.$$

Dalle radici della (42) si passa alle frequenze tramite la formula:

$$(48) \quad f = \frac{\lambda}{2 \pi R} \left[\frac{E_r t}{\mu} \gamma \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La convergenza dei precedenti sviluppi, che nella (43) si intendono calcolati per $x = x_0 = \alpha r_0$, è più o meno spinta a seconda dei valori dell'argomento: essa è assai rapida quando questo tende a zero (ciascuno degli sviluppi si riduce infatti ad un sol termine nel caso limite della piastra piana, per la quale è $x_0 = 0$) e si conserva abbastanza elevata fintantochè l'argomento stesso non si discosta notevolmente dall'unità. Tale circostanza si verifica comunemente in virtù del basso valore dell'indice di ribassamento dei gusci in esame, da cui l'argomento dipende in misura sensibile. Negli esempi numerici sviluppati la precisione richiesta è stata infatti raggiunta arrestando generalmente gli sviluppi dopo pochi termini.

L'equazione (42) può essere a sua volta arrestata al grado voluto e fornisce le successive frequenze in numero tanto più elevato e con approssimazione tanto maggiore quanto più alto è il grado prescelto.

4. APPLICAZIONE NUMERICHE

Per il caso studiato in dettaglio al n. precedente sono stati sviluppati due gruppi di esempi numerici che hanno permesso di tracciare i diagrammi di cui alle figg. 1 e 2.

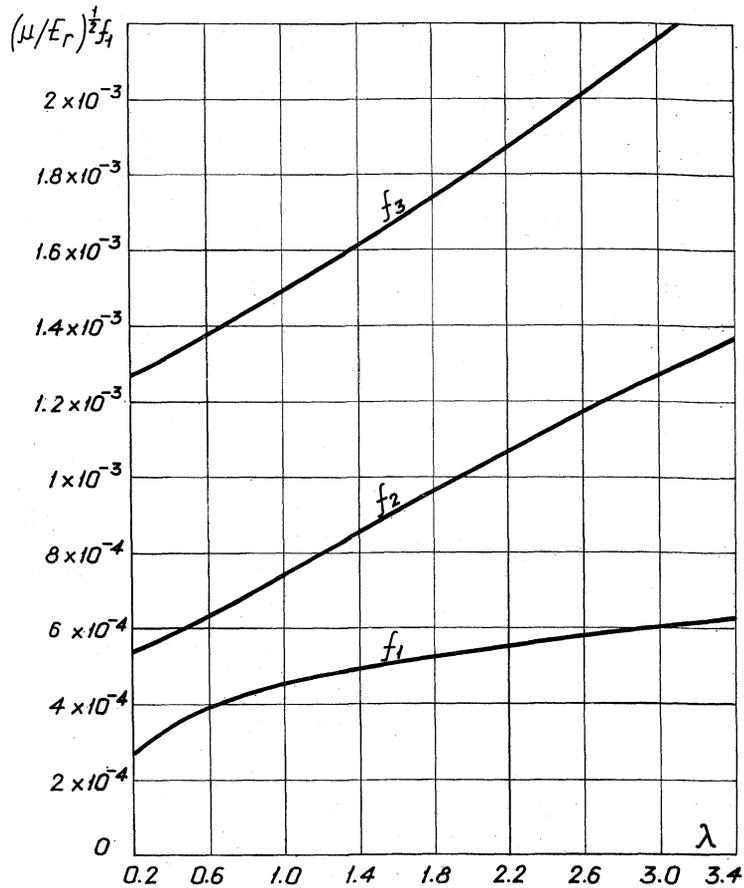


Fig. 1.

Nel primo gruppo è stato preso in esame un guscio con le seguenti caratteristiche geometriche:

$$r_0 = 300 \text{ cm} \quad , \quad R = 1515 \text{ cm} \quad , \quad t = 10 \text{ cm.}$$

Delle variabili atte a definire le proprietà elastiche del guscio si sono tenuti costanti il modulo E_r ed il coefficiente $\nu_{r\theta}$ (per il quale si è assunto il valore 0.1) e si è lasciato variabile il parametro λ tra valori compresi nell'intervallo (0.2-3.4). Ne sono derivati i diagrammi di fig. 1 che illustrano le leggi con cui variano, al variare di λ , le prime tre frequenze, valutate a meno $\sqrt{E_r/\mu}$.

Con la seconda classe di esempi si è inteso rilevare anche l'influenza che esercita sull'entità delle frequenze l'indice di ribassamento del guscio. Sono stati fissati allo scopo il raggio di base, lo spessore ed il coefficiente ν_{θ} , per i quali si sono assunti i valori di cui alla prima classe di esempi, mentre si è lasciato variabile il raggio di curvatura R cui si sono successivamente

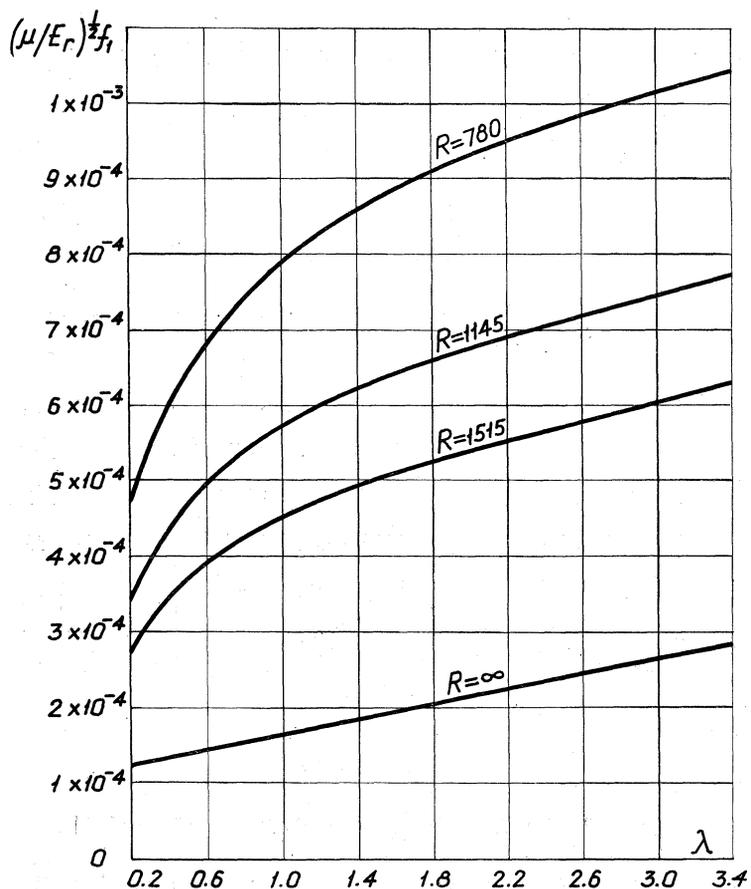


Fig. 2.

assegnati i valori ∞ (piastra piana), 1515 cm, 1145 cm, 780 cm, corrispondenti agli indici di ribassamento 0, 1/20, 1/15, 1/10. In fig. 2 sono illustrate le leggi con cui varia, al variare di λ , la prima frequenza nei quattro casi esaminati.

Per la ricerca delle radici della (42) è stato predisposto un programma di calcolo basato sull'impiego dell'algoritmo QD (Quozienti-Differenze) [6]⁽³⁾. Per ogni valore di λ preso in considerazione l'equazione è stata ripetutamente arrestata a gradi crescenti fino al raggiungimento della precisione desiderata.

(3) I programmi di calcolo sono stati elaborati con la collaborazione del prof. ing. F. Aluffi-Pentini dell'Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Bari.

Si è potuto constatare che per il calcolo esatto sino alla terza cifra significativa della prima frequenza è più che sufficiente arrestare l'equazione al quarto o quinto grado, e che per conseguire la stessa approssimazione nella valutazione della seconda e terza frequenza l'arresto dell'equazione deve essere effettuato ad un grado di poco superiore. Indicativo è a questo proposito quanto si può desumere dalla Tabella che segue dove sono riportati, con dieci cifre significative, i valori delle prime tre frequenze conseguiti per $R = 1515$ cm e $\lambda = 2.6$ arrestando l'equazione a gradi crescenti dal quarto all'undicesimo.

Grado	I FREQUENZA	II FREQUENZA	III FREQUENZA
	$f \sqrt{\mu/E_r}$	$f \sqrt{\mu/E_r}$	$f \sqrt{\mu/E_r}$
4°	$5.807488169 \times 10^{-4}$	$1.157039448 \times 10^{-3}$	$1.157039447 \times 10^{-3}$
5°	$5.807318399 \times 10^{-4}$	$1.171654412 \times 10^{-3}$	$1.922606699 \times 10^{-3}$
6°	$5.807320141 \times 10^{-4}$	$1.170979743 \times 10^{-3}$	$2.019995969 \times 10^{-3}$
7°	$5.807320131 \times 10^{-4}$	$1.170995688 \times 10^{-3}$	$2.010053225 \times 10^{-3}$
8°	$5.807320131 \times 10^{-4}$	$1.170995457 \times 10^{-3}$	$2.010456595 \times 10^{-3}$
9°	$5.807320131 \times 10^{-4}$	$1.170995459 \times 10^{-3}$	$2.010445341 \times 10^{-3}$
10°	$5.807320131 \times 10^{-4}$	$1.170995459 \times 10^{-3}$	$2.010445201 \times 10^{-3}$
11°	$5.807320131 \times 10^{-4}$	$1.170995459 \times 10^{-3}$	$2.010445201 \times 10^{-3}$

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. REISSNER (1946) - *On vibrations of shallow spherical shells*, «Journal of Applied Physics», 17, 1038-1042.
- [2] E. REISSNER (1955) - *On transverse vibrations of thin shallow elastic shells*, «Quarterly of Applied Mathematics», 13, 169-176.
- [3] E. REISSNER (1955) - *On axy-symmetrical vibrations of shallow spherical shells*, «Quarterly of Applied Mathematics», 13 (3), October.
- [4] U. RICCIUTI e A. GENTILE (1975) - *Analisi statica del guscio sferico ortotropo*, «Giornale del Genio Civile», fasc. I, II, III, 1975.
- [5] U. RICCIUTI e A. GENTILE (1976) - *Le vibrazioni libere delle piastre circolari ortotrope*, Atti del III Congresso Nazionale dell'Associazione Nazionale di Meccanica Teorica ed Applicata, Vol. II. *Meccanica dei Solidi*, Cagliari.
- [6] A. RALSTON e H. S. WILF (1967) - *Mathematical Methods for digital computers*, Vol. II, New York, London, Sidney, Wiley and Sons, Inc. p. 37.